BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIV
B
22
NAPOLI

XXXIV
13
22

Digitized by Google

LES ELEMENS DE GEOMETRIE ou DE LA MESURE DU CORPS.

Qui comprennent tout ce qu'Euclide, en a enſeigné: Les plus belles propoſitions d'Archimede & l'Analiſe.

Par le R. P. BERNARD LAMY, Prêtre de l'Oratoire.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III - NAPOLI

Grenoble.

A PARIS,
Chez ANDRE' PRALARD, ruë S. Jacques, à l'Occaſion.

M. DC. LXXXV.
AVEC PRIVILEGE DU ROY.

Digitized by Google

PREFACE.

APRES avoir conſideré les proprietés de la Grandeur en general, dans le Traité que nous en avons publié il y a quelques années, nous recherchons icy celles du corps, qui eſt une des eſpeces de la grandeur. Quoy que nous ne parlions point en particulier de la terre, cependant, parce que de tous les corps, elle eſt la plus connuë, & que c'eſt la neceſſité de la meſurer & de la partager, qui a porté les hommes à cultiver les Mathematiques; la Science du corps en general que nous traitons icy, s'appelle *Geometrie*, c'eſt à dire, la Science de la meſure de la terre.

L'utilité de cette Science eſt evidente, puis qu'elle donne les Elemens de l'Aſtronomie, de la Gnomonique, de la Marine, de l'Optique, de l'Architecture, des Fortifications, des Mechaniques, & generalement de toutes les Sciences qui ont le corps pour objet, & par conſequent de la Phyſique, qui étant bien

traitée, comme pluſieurs Philoſophes le pretendent, n'eſt qu'une Geometrie. Cela ne me perſuaderoit pas neanmoins qu'on dût l'enſeigner dans les Ecoles publiques, ſi d'ailleurs elle n'étoit propre pour former l'eſprit, le rendre exact, étendu & penétrant.

Nous avons vû dans la Preface du Traité de la Grandeur, l'importance qu'il y a de s'accoûtumer à conſiderer les choſes ſpirituelles, & que pour cette raiſon l'Etude de ce Traité étoit avantageuſe, parce que les verités qu'on y propoſoit étant expliquées ſans figures, leurs idées ſe preſentoient à l'eſprit ſans images. On ne peut voir par l'imagination que ce qui eſt corps; ceux donc qui ne font uſage que de leur imagination, ne peuvent appercevoir les choſes ſpirituelles, ils ne croyent pas même qu'il y en ait, parce qu'ils n'en trouvent point d'image dans leur imagination; ainſi qu'en cherchant des corps avec les mains, ſi l'on ne rencontre rien qui reſiſte, on croit qu'il n'y en a point.

Il eſt donc important de s'accoûtumer à voir ſans images, & de ſe convaincre qu'il y a des verités qui ſe conçoivent autrement que les corps; mais il ne faut pas pour cela negliger de cultiver ſon imagination: on en peut même tirer un grand ſecours pour concevoir les cho-

ſes ſpirituelles; & c'eſt une neceſſité dans l'état où nous nous trouvons, d'y avoir recours. En quittant Dieu nous ſommes tombés dans les corps, il faut donc nous y appuyer, pour nous relever ; comme nous le faiſons quand nous ſommes tombés par terre.

L'ame voit une verité qui luy eſt preſente, lors qu'elle la conſidere, comme les yeux un objet dont ils ne ſe détournent point. Mais les corps l'attirent vers eux par les impreſſions qu'ils font ſur elle,& luy font perdre de veüe cette verité, à moins qu'elle n'y ſoit comme attachée par les corps mêmes, qui ſont la cauſe de ſes diſtractions. Ce qui arrive lors que cette verité eſt exprimée par des ſignes ſenſibles, qui tournant l'ame vers eux, l'obligent de la voir. Peu de perſonnes ſe peuvent paſſer de ce ſecours. Il y a d'habiles gens qui ne voyent rien dans un ſujet lors qu'ils le conſiderent par les ſeuls yeux de l'eſprit, & qui aprés l'avoir exprimé ſur le papier, apperçoivent tout ce qu'il en faut voir pour en juger.

Aprés donc s'eſtre accoûtumé à concevoir les choſes ſans images, ce qui eſt tres-important pour la Religion, il eſt utile d'apprendre icy comme il faut ſe ſervir de ſon imagination, qui n'eſt point dangereuſe à ceux qui ſçavent diſtinguer

ce que l'eſprit pur conçoit d'avec ce qu'elle preſente. Elle eſt une ſource de pluſieurs erreurs lors qu'on ne conſulte point la raiſon ; mais auſſi il faut avoüer que ceux qui veulent trop s'élever ſans s'appuyer ſur ce qui eſt ſenſible, ſont fort ſujets à l'illuſion, & qu'ils s'égarent ſouvent dans de vaines penſées.

L'ame qui eſt plus occupée des corps que des autres choſes ſpirituelles, n'apperçoit qu'à demy celles-cy. Si elle n'eſt donc reſervée dans ſes jugemens pour ne prononcer que ſur ce qu'elle voit, elle attribue ou elle retranche plus qu'il ne faut de ce qui luy eſt propoſé. Il eſt bien plus facile d'être ébloüy, & de ſe laiſſer ſurprendre en penſant à quelque choſe de ſpirituel, qu'en maniant les corps. Une application trop forte à la verité qui eſt au deſſus des ſens, bleſſe l'ame, & la douleur l'oblige pour ſe délaſſer de conſiderer quelque objet ſenſible qui luy ſoit agreable ; ainſi comme ces ſortes de meditations ſont interrompuës, elle y eſt facilement ſurpriſe par l'erreur, ſi ce n'eſt que ce qu'elle conſidere ſoit extrêmement ſimple, comme ce qui a fait le ſujet du Traité de la Grandeur. Dans les autres Sciences abſtraites l'erreur y eſt toûjours à craindre ; on eſt obligé de ſe contenter de vrayſemblances ; ce qui n'arrive pas dans cel-

les qui ſont aydées de l'imagination, comme la Geometrie, dont les Theorêmes frappent l'eſprit trop vivement pour s'y tromper, quand on les conſidere avec un peu d'attention : la verité ou la fauſſeté y paroiſſent trop evidemment, pour qu'on les confonde.

Outre que la Geometrie donne des modeles qui ne peuvent tromper, de demonſtrations claires & convaincantes, elle apprend la methode de conduire l'eſprit de verité en verités. On y voit des exemples comme il faut dans la recherche des Sciences ſe ſervir des premieres connoiſſances qu'on a acquiſes, ou qui nous ſont naturelles, pour aller plus loin. L'art & le ſecret des Sciences ne conſiſtent qu'à déduire des premieres verités que Dieu a miſes dans nôtre cœur, les conſequences dont elles renferment les principes, c'eſt à dire, à ménager la Science naturelle ; ce que les Geometres font admirablement, comme nous l'allons faire voir, en découvrant en même temps les principes & les fondemens de la Geometrie, ce qui ſervira de diſpoſition pour la comprendre avec plus de facilité.

La Geometrie eſt établié ſur un tres petit nombre de principes : les connoiſſances qu'elle donne, ſe peuvent reduire à trois ou quatre verités principales, qui

ſont naturellement connuës; par exemple, qu'*une choſe ne peut pas être & n'être pas dans un même temps*; d'où il ſuit que puiſque le tout & ſes parties priſes enſemble ne ſont qu'une même choſe, il faut que *le tout ſoit égal à ſes parties*, autrement la même choſe ſeroit & ne ſeroit pas, & que *deux grandeurs égales à une même grandeur ſont égales entr'elles*; car ces trois grandeurs ne ſont qu'une même choſe, ainſi ſi elles étoient inégales entr'elles, elles ſeroient & ne ſeroient pas.

On peut rapporter à ce principe qu'*une choſe ne peut pas être & n'être pas*, ces quatre Axiomes ſuivans.

Si à des grandeurs égales on en ajoûte d'egales, les touts ſeront égaux.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront égaux.

Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront inégaux.

Si à des grandeurs inégales on en ajoûte d'égales, les touts ſeront inégaux.

Tous ces Axiomes ne ſont fondés que ſur ce que les touts égaux ont des parties égales, & les inégaux ont des parties inégales. Si les touts égaux n'avoient pas des parties égales, ils ſeroient & ne ſeroient pas.

De ces verités ſuit une infinité d'autres verités; par exemple, que *les moitiés*

de deux touts égaux ſont égales, ou que *les doubles de ces touts ſont égaux*, & à la même raiſon que *les tiers de deux touts égaux ſont égaux*, ou que *les triples de deux touts égaux ſont égaux*, ainſi des quarts & des quadruples, & d'une infinité de ſemblables propoſitions.

Ces verités ſuivantes, bien qu'elles ſoient, pour ainſi dire, groſſieres, ſont des ſources tres fecondes de pluſieurs demonſtrations, ſçavoir que *le tout eſt plus grand qu'une de ſes parties* : & que *ce qui eſt contenu*, ou *renfermé dans une grandeur, ne peut être plus grand que cette grandeur.* Que *deux grandeurs qui conviennent en tout, lors qu'on les poſe l'une ſur l'autre, ou l'une dans l'autre, ſont égales.*

Les Geometres recourent ſouvent à ce premier principe, qu'*une choſe ne peut pas être & n'être pas* ; en faiſant voir que ſi les choſes n'étoient pas telles qu'ils les propoſent, elles ſeroient & ne ſeroient pas. Ainſi ils reduiſent la choſe à l'impoſſible, comme lors qu'ils tirent leur preuve de la conſtruction ou de la ſuppoſition qu'ils ont faite, c'eſt à dire, qu'aprés qu'ils ont fait une choſe en telle maniere, ils tirent une cõcluſion qui ne leur peut être conteſtée, à moins que de dire qu'une choſe peut être & n'être pas en même temps, ce qui eſt abſurde, car leur concluſion eſt une ſuite ſi naturelle de

ce qui a été fait, que ſi cette concluſion ne ſuit pas, il faut que la choſe n'ait pas été faite comme on l'a ſuppoſé.

Voilà tous les principes des Geometres, perſonne ne les ignore. Ce n'eſt donc que l'uſage qu'ils en ont fait, qui leur a fait découvrir une infinité de veritéś ſi cachées au reſte des hommes ; ce qui eſt une preuve que ſi on uſoit bien des premieres connoiſſances naturelles, & ſi on alloit par ordre comme font les Geometres, on feroit d'admirables progrés dans les Sciences; on ne les acquiert que par ce moyen. C'eſt pourquoy les premieres études n'étant que pour apprendre comme il faut étudier, il n'y a point de Science plus propre pour les premiers exercices que la Geometrie.

Les livres des anciens Geometres ne ſont pas ſi propres pour exercer l'eſprit que ceux qui ont été faits en ce temps. Les premiers Geometres ne faiſoient que ramaſſer les materiaux, ils étoient occupés à trouver les principaux Theorêmes de la Science, ils n'ont point propoſé leurs inventions dans un ordre qui ſoit naturel: Cela étoit reſervé à nôtre ſiecle, où toutes les verités de Geometrie neceſſaires pour élever un bâtiment, s'il m'eſt permis de parler de la ſorte, ſe ſont trouvé ramaſſées. La Geometrie a été cultivée en ces derniers temps avec

plus de ſuccez qu'en aucun autre. On y a fait de grandes découvertes, & ce qui eſt de plus conſiderable, on a trouvé le moyen d'éclaircir ce que les Anciens avoient écrit avec obſcurité & confuſion.

Ce n'eſt pas icy le lieu de faire l'Hiſtoire de ces découvertes, & de rapporter en détail quels ſont les Grands Hommes qui ont enrichy cette Science par leurs inventions, mais je ſuis obligé de dire que l'Auteur des Elemens de Geometrie qui furent imprimés en François chez Savreux l'an 1667. c'eſt le premier qui a dõné un ordre naturel aux Elemens de Mathematique. Cet Auteur n'a point parlé des ſolides, ce que je fais d'une maniere beaucoup plus étenduë que ne fait Euclide ny tous ſes Commentateurs, car j'y comprend ce qu'Archimede a demontré de plus conſiderable touchant les Cylindres & les Cones, & la Sphere. Je r'enferme auſſi dans ces Elemens ce que ce Geometre a écrit de la dimenſion du cercle.

Je diſtribue mon Ouvrage ſelon les trois dimenſions, qui ſe diſtinguent dans le corps, ſçavoir la longueur, la largeur, & la profondeur, ou la ſolidité. Dans le premier livre je conſidere les proprietés de la premiere dimenſion du corps, me retranchant encore à la longueur qui eſt une ligne, ou droite ou circulaire, parce que ces lignes ſont les plus

ſimples & les plus faciles à connoître. Ainſi l'ordre demande qu'on commence par elles, & qu'on reſerve à un autre lieu de parler des autres lignes, qui ſont plus compoſées, & ont des proprietés plus cachées.

Dans le ſecond Livre je traite de la ſeconde dimenſion, & je n'y parle pour la même raiſon que des largeurs ou ſurfaces qui ſont les plus ſimples; c'eſt à dire, des ſurfaces droites qu'on nomme plans, qui ſont bornées par des lignes droites ou par des cercles. Dans le troiſiéme Livre, j'explique ce qui regarde les raiſons & les proportions des lignes droites, & des cercles, & des ſurfaces droites, ou des plans. Dans le quatriéme, je traite de la ſolidité. Je n'y ay pû parler que des ſolides compris ſous des ſurfaces planes ou ſpheriques, qui ſe font par le mouvement d'une ligne droite ou d'un cercle. J'expliqueray les differentes eſpeces de lignes & de ſurfaces courbes, & les ſolides qu'elles compoſent dans une troiſiéme partie, qui contiendra les Elemens de ces lignes & de ces ſurfaces.

Je me ſuis appliqué à rendre ces Elemens faciles & courts; car la longueur eſt une des cauſes du dégoût qu'on a de cette Science, qui fait que peu de perſonnes s'y appliquent, quoy que tout le monde l'eſtime, & juge qu'elle eſt

utile. Je n'abbrege pas ces Elemens en retranchant des propoſitions neceſſaires: il y a plus de choſes que dans Euclide; mais en me ſervant de démonſtrations courtes, & prenant des voyes abbregées par où je mene tout d'un coup à la verité.

Outre cela, je me ſers de démonſtrations generales, de ſorte qu'en ayant conceu une, on en conçoit pluſieurs autres. Ce qui fait qu'on rencontre peu de difficulté, car pourvû qu'on prenne peine à comprendre la demonſtration de certains Theorêmes fondamentaux, qui ſont en petit nombre, on trouve que tout le reſte eſt preſque connu; ainſi je reduis les matieres ſous certains chefs, ce qui contribue à faire retenir ce que l'on a apris.

Comme mon principal deſſein eſt de contribuer à rendre l'eſprit de ceux qui étudient, exact & penetrant, à quoy la methode des Geometres, qu'ils appellent Analyſe, eſt particulierement utile, je tâche de donner une idée de cette methode, appliquant à la Geometrie ce que j'en ay dit ailleurs par rapport à la Grandeur en general. Je fais voir comment l'on peut porter loin les premieres connoiſſances de la Geometrie, & en même temps je propoſe des modeles de la methode qu'il faut ſuivre dans la reſolution d'une queſtion.

Je n'enviſage la juſteſſe de l'eſprit que

par rapport à la Religion. C'eſt Dieu même que je regarde dans l'étude de la Geometrie. L'on n'y parle que du Corps: on y trouve cependant de grands ſujets de penſer à Dieu. L'harmonie du Monde n'eſt bien connuë que par ceux qui ſçavent la Geometrie. Tout ce qu'on voit de beau dans cette Science touchant les figures, leurs raiſons & leurs proportions, ſe remarque en ſuite dans les Ouvrages de la Nature; ce qui donne lieu d'admirer la Sageſſe de celuy qui en eſt l'Ouvrier.

Il n'y a point de petit Corps qui ne ſoit capable de toutes les figures de Mathematique, ſelon qu'on concevra que ſa matiere ſera diſpoſée. Ces figures ont toutes leurs proprietez. L'eſprit peut par conſequent découvrir en chaque Corps un nombre infini de veritez ſurprenantes, lors qu'il le conſidere avec ordre; c'eſt à dire, s'il fait les conſiderations que peut faire un habile Geometre, & s'il applique à ce Corps tout ce que la Geometrie enſeigne.

Combien d'admirables veritez verrions-nous donc en Dieu, ſi nous l'étudions autant que nous faiſons les Corps? Nous n'y voyons preſque rien, parce que nôtre eſprit ne peut s'applique autant de temps à luy, qu'il fait à la matiere; mais combien de choſes les Saints dé-

couvrent-ils en ſa Divine Eſſence, qui eſt la cauſe de la fecondité de la matiere? Et ſi la connoiſſance des veritez que la Geometrie nous enſeigne donne tant de contentement, quel eſt le plaiſir des Bienheureux qui voyent des veritez d'autant plus excellentes, que Dieu ſurpaſſe infiniment les Corps.

Ainſi l'étude de la Geometrie, outre que par le plaiſir ſpirituel qu'elle cauſe, peut inſinüer du mépris pour les voluptés, & par là nous rendre plus propres pour la Morale de l'Evangile qui en eſt ennemie; outre, dis-je, qu'elle diſpoſe l'eſprit pour toutes les Sciences, pour celles mêmes qui ſont élevées au deſſus de la matiere, puis qu'elle l'en rend capable, elle nous fait encore connoître quelle eſt la vaſte étenduë de la Science que poſſedent ceux qui voyent Dieu, & de quel plaiſir ils joüiſſent en découvrant tant de veritez dans la Divine Eſſence; & par conſequent elle enflâme ceux qui l'étudient avec un eſprit Chrêtien d'une plus forte ardeur pour acquerir Dieu, que pour devenir Geometres.

DEFINITIONS DE QVELQVES termes dont on ſe ſert dans les Mathematiques.

Axiome.

ON appelle ainſi une propoſition ſi claire qu'elle n'a pas beſoin de preuve.

Suppoſition ou demande.

C'eſt une propoſition qui n'eſt pas ſi evidente qu'un Axiome, mais auſſi qu'on ne peut conteſter ; ainſi on demande qu'on l'accorde, pour n'être pas obligé de la démontrer.

Definition.

C'eſt une propoſition qui détermine l'idée d'un mot & en ôte la confuſion.

Theorême.

On nomme ainſi une propoſition dont il faut démontrer la verité.

Problême.

C'eſt une propoſition dans laquelle il s'agit de faire quelque choſe,& de prouver qu'on a fait ce qu'on avoit propoſé de faire.

Lemme.

C'eſt une propoſition qui n'eſt au lieu où elle eſt que pour ſervir de preuve à d'autres qui ſuivent.

Digitized by Google

Corollaire.

C'eſt une propoſition qui n'eſt qu'une ſuite d'une autre precedente.

Explication de quelques Notes.

CEtte marque + ſignifie *plus*, A + B, c'eſt à dire, A plus B.

Celle-cy — ſignifie *moins*, A — B, c'eſt à dire, A moins B.

= C'eſt la marque de l'égalité C = D: c'eſt à dire, que C eſt égal à D.

Ces quatre points : : ſont la marque de la proportion.

Cecy ∴ c'eſt la marque d'une proportion continuë.

§. C'eſt à dire, Section.

Sup. ſupra, ou, cy-deſſus.

Ainſi Theor. 4. §. 3. liv. 2. c'eſt à dire, Theorême 4e ſection 3e livre ſecond, ou Theor. 5e *ſup.* c'eſt à dire, Theorême 5e cy-deſſus.

Gr. c'eſt une marque qui fait connoître qu'on cite le Traité de la Grandeur.

Principes generaux, ou *Axiomes.*

1. LE tout eſt plus grand que ſa partie.
2. Le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.
3. Les grandeurs égales à une même grandeur ſont égales entr'elles.
4. Si à grandeurs égales on en ajoûte d'égales, les touts ſont égaux.
5. Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront égaux.

6. Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront inégaux.
7. Si à des grandeurs inégales on en ajoûte d'égales, les touts ſeront inégaux.
8. Les grandeurs qui conviennent étant poſées les unes ſur les autres, ſont égales.
9. Deux choſes doubles ou triples d'une troiſiéme ſont égales entr'elles.
10. Les choſes qui ſont moitiés ou tiers d'une même choſe, ou de choſes égales, ſont égales entr'elles.
11. Une grandeur qui a le ſigne + étant jointe avec la même grandeur qui a le ſigne − eſt égale à rien, c'eſt à dire, que + A − A = zero.

Lors que la verité d'une propoſition eſt evidente, on ſe contente de l'enoncer par des termes clairs. Si cette propoſition à beſoin de preuves, on la prouve en ſe ſervant, ou d'axiomes, ou de ſuppoſitions qu'on a faites, & qui ont eſté receües, ou des Theorêmes, ou des Problêmes, ou des Lemmes, ou enfin des Corollaires precedens, dont les verités ont eſté démontrées auparavant.

On dit qu'une choſe eſt vraye par la conſtruction, lors qu'étant convenu que certaines regles ſont bonnes, ſuppoſé qu'on les ait ſuivies, on ne peut rejetter les conſequences qui en ſont tirées.

Ie ſuppoſe que les principes generaux ſont ſi connus & ſi preſens à l'eſprit, qu'il n'eſt pas neceſſaire de les citer.

TABLE.

LIVRE PREMIER.

DE la premiere dimenſion du Corps. page 1.

Section premiere.

Des differentes meſures, ou dimenſions du corps p. 2

Section ſeconde.

De la longueur qui eſt la premiere & la plus ſimple dimenſion du corps p. 4.

Des lignes droites, p. 4

Section troiſiéme.

De la ligne courbe, qui eſt circulaire. p. 7

Section quatriéme.

De la differente poſition des lignes droites, qui ſont entr'elles ou perpendiculaires, ou obliques, ou paralelles. p. 14

Des lignes perpendiculaires. p. 15

Des lignes obliques. p. 23

Des lignes paralelles. p. 26

Section cinquiéme.

Des lignes terminées à une circonference. p. 30

Des lignes tangentes. p. 35

LIVRE II.

De la ſeconde dimenſion du corps.

Section premiere.

Des ſurfaces droites, ou planes, compriſes entre deux lignes qui ſe coupẽt, ce qui s'apelle angle. 41

Definitions des angles, de leur nature, & de leur meſure.

Section ſeconde.

Des ſurfaces compriſes entre trois lignes, ce qui s'appelle, triangle. p. 61

Definitions des triangles, de leur nature,

& de leurs proprietez.

Section troiſiéme.

Des ſurfaces compriſes entre pluſieurs lignes, ou des figures de pluſieurs côtez, leurs definitions & leurs proprietez. p. 77

Section quatriéme.

De la meſure de l'aire des ſurfaces. p. 88

LIVRE III.

Des raiſõs & proportiõs des lignes & des ſurfaces. 99

Section premiere.

Des raiſons & des proportions des lignes. p. 100

Section ſeconde.

Des raiſons & proportions qu'ont les circuits de figures ſemblables. p. 129

Section troiſiéme.

Des raiſons & des proportions des ſurfaces. p. 134

Section quatriéme.

De la commenſurabilité, ou incommenſurabilité des lignes & des ſurfaces. p. 152

LIVRE IV.

De la troiſiéme dimenſion du corps, õ des ſolides. 165

Section premiere.

Des ſections & rencontres des plans. p. 166

Section ſeconde.

De la compoſition des ſolides. p. 180

Section troiſiéme.

De la ſurface des ſolides. p. 193

Section quatriéme.

De la ſolidité des ſolides. p. 213

Section cinquiéme.

De la maniere d'inſcrire, ou circonſcrire à une ſphere les cinq corps reguliers. p. 233

LIVRE V.

De la Methode. p. 255

ELEMENS DE GEOMETRIE. OV DE LA MESVRE DV CORPS.

LIVRE PREMIER.
De la premiere dimenſion du Corps.

SECTION PREMIERE.
Des differentes meſures, ou dimenſions du Corps.

Premiere Definition.

LE Corps eſt un être étendu, dans lequel l'on diſtingue trois dimenſions, ſçavoir, la longueur, la largeur & la profondeur.

Premiere Demande.

On peut conſiderer une de ces trois choſes ſans faire attention à l'autre, la longueur ſans conſiderer la largeur, & la largeur ſans conſiderer la profondeur, comme l'on regarde la longueur des chemins ſans faire reflexion ſur leur largeur, & leur largeur ſans penſer à la profondeur de la terre.

Scholie.

La notion de la longueur exclut celle de la largeur & de la profondeur, & celle de la largeur exclut celle de la profondeur, & ces notions ne ſont point fauſſes, quoy qu'effectivement ces trois choſes ſoient inſeparables; parce que dans la maniere dont elles ſont conceües, elles ſont diſtinguées en ce que l'une eſt conſiderée ſans l'autre. Ainſi les Geometres peuvent ſuppoſer en cette maniere des êtres qui ſoient longs ſans être larges, & & qui ſoient larges ſans être profonds ou épais; & quand on voudroit ſoûtenir que ces ſuppoſitions ſont entierement fauſſes, les conſequences qu'on en tire ne pourroient être rejettées comme fauſſes. Car par exemple, bien qu'il n'y ait point de cercle parfait dans le monde, il eſt evident que ſelon qu'on ſuppoſe que le cercle eſt une figure dont la circonference eſt en toutes ſes parties également éloignée du centre, il faut que toutes les lignes tirées du centre du cercle à la circonference ſoient égales.

Seconde definition.

Le point, c'eſt ce qui n'a aucune partie, & qui par conſequent eſt indiviſible.

Scholie.

C'eſt à dire, que c'eſt une grandeur dont on ne conſidere point les parties dans leſquelles elle peut être divilée.

Troiſiéme definition.

Ligne, c'eſt une longueur ſans largeur

Scholie.

C'eſt à dire, une longueur dont on ne conſidere point la largeur, ou qu'on ſuppoſe n'avoir point de largeur.

Quatriéme definition.

La ligne ou la longueur qui eſt la plus courte entre deux points, s'appelle ligne droite.

Cinquiéme definition.

La ligne qui n'eſt pas la plus courte de toutes celles qu'on peut mener entre deux points, eſt ou courbe ou compoſée de deux ou de pluſieurs differentes lignes droites.

Scholie.

La ligne A faite de deux lignes, & la ligne B faite de pluſieurs lignes qui ſe joignent dans un point, ne peuvent point être conſiderées comme une ſeule ligne droite.

Sixiéme definition

De deux lignes courbes menées entre deux mêmes points, celle qui eſt la plus longue, eſt dite eſtre la plus courbe.

Septiéme definition

Surface, c'eſt une grandeur longue & large, ſans profondeur.

Scholie.

C'eſt à dire, une longueur & largeur dont on ne conſidere point la profondeur.

Huitiéme definition.

Surface droite ou plane, eſt celle qui eſt la plus courte entre deux lignes droites.

Neuviéme definition.

Surface courbe, eſt celle qui eſt plus grande entre deux mêmes lignes, qu'une ſurface droite ou plane.

Dixiéme definition.

Solide, c'eſt une grandeur de trois dimenſions, qui s'appelle corps.

SECTION II.

De la longueur.

Qui eſt la premiere & la plus ſimple dimenſion du Corps.

Des lignes droites.

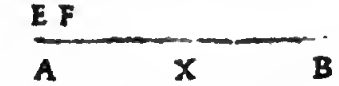
Propoſitions naturellement connuës touchant les lignes droites.

Premiere propoſition ou demande.

LEs extremitez d'une ligne ſont deux points.

Scholie.

Les extremitez de la ligne X ſont A & B qui ſont indiviſibles, premierement, quant à leur longueur, car ſi A avoit deux parties, par exemple E & F, ce ſeroit E qui ſeroit l'extremité. En ſecond lieu, puiſque cette ligne X n'a ny largeur, ny profondeur, les deux extremitez A & B n'ont ny largeur, ny profondeur ; étant donc indiviſibles en tout ſens, ce ſont deux points par la definition ſeconde.

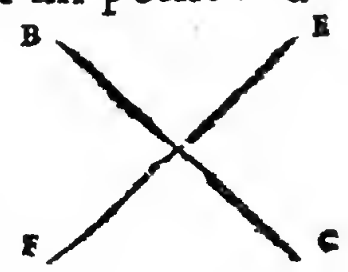


Seconde propoſition ou demande.

Lors que deux differentes lignes ſe coupent, leur ſection eſt un point indiviſible.

Scholie.

La ligne E F coupe B C, ſi elle la coupe en deux differens points, cette ligne E F a de la largeur, ce qui eſt contre la definition de la ligne droite, la ſection de B C & de E F eſt donc un point,



Troiſiéme propoſition ou demande.

Une ligne menée entre deux points, laquelle s'écarte d'une part ou de l'autre d'une ligne droite menée entre ces deux mêmes points, eſt plus grande que cette ligne droite. Voyez la figure ſuivante.

Quatriéme propoſition ou demande.

Deux points étant donnez, on peut mener une ligne droite de l'un à l'autre.

Scholie.

L'eſprit n'appertçoit rien d'impoſſible dans cette propoſition. L'inſtrument dont on ſe ſert pour mener une ligne droite eſt une regle. Pour connoître ſi une regle eſt bonne, on s'en ſert pour tirer une ligne, à laquelle appliquant dans un autre ſens & d'un autre côté cette même regle, ſi on trouve qu'elle convient toujours avec cette ligne, on juge qu'elle eſt juſte. Un moyen ſeur pour mener une ligne droite eſt de ſe ſervir d'un filet fort ſubtil, comme pourroit être un cheveu, car aprés l'avoir tendu entre deux points autant qu'on le peut, ſans le rompre, ſelon la notion de la ligne droite, il marquera une ligne droite entre ces deux points.

Cinquiéme propoſition ou demande.

Une ligne droite étant donnée, on la peut prolonger. Elle ne peut pas être prolongée du même côté vers deux differens points.

Scholie.

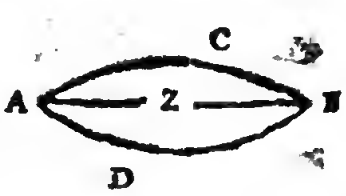
On prolonge une ligne par le moyen d'une regle.

Sixiéme propoſition ou demande.

Entre deux mêmes points on ne peut mener qu'une ligne droite.

Scholie.

Si on peut mener pluſieurs lignes droites entre A & B autres que la ligne Z, il faut qu'elles s'écartent ou vers C ou vers D, donc elles ſeront plus longues que Z, par conſequent elles ne ſeront pas droites.



Car une ligne entre A & B ne peut être droite qu'elle ne ſoit la plus courte de toutes les lignes qu'on puiſſe mener entre ces deux points. Ainſi on ne peut mener qu'une ſeule ligne droite entre A & B. On pourroit concevoir pluſieurs lignes entre deux points, couchées les unes ſur les autres, mais elles ne ſeroient qu'une même ligne.

Entre deux mêmes points on peut mener une infinité de differentes lignes courbes, c'eſt pourquoy lors qu'il s'agit de meſurer la diſtance d'un point à un autre point, on ne prend pas pour meſure une ligne courbe, mais une ligne droite.

Septiéme propoſition ou demande.

Deux lignes droites qui ont deux points communs ne ſont qu'une même ligne.

Scholie.

La ligne C B & la ligne A D ont deux points communs, ſçavoir A & B, on ne peut concevoir entre A & B qu'une ligne droite par la ſixiéme propoſition *ſup.* Ainſi A B & B A ne ſont point deux differentes lignes. La ligne B A étant prolongée ne peut aller ailleurs qu'au même point C, ny A B ailleurs que vers D lors qu'on la prolonge ; partant A D avec B C ne ſont qu'une même ligne droite; car entre C & D il n'y a qu'une ſeule ligne droite.

Huitiéme propoſition ou demande.

Donc, la poſition d'une ligne droite ne dépend que de deux points.

Scholie.

Car ſi par les deux points donnez A & B l'on mene une ligne droite, elle ſera celle que l'on cherche, puis qu'on ne peut pas mener par deux points pluſieurs differentes lignes droites, toutes celles qui ont deux points communs n'étant qu'une même ligne par la propoſition 7.

Neuviéme propoſition ou demande.

Deux lignes droites qui croiſent, ou qui ſe coupent, ne ſe peuvent rencontrer que dans un ſeul point.

Scholie.

Car ſi elles ſe rencontroient en deux points, elles ne ſeroient qu'une même ligne par la propoſition 7 *ſup.* Ainſi elle ne ſeroient pas differentes l'une de l'autre, comme le ſont deux lignes qui croiſent & qui ſe coupent.

Digitized by Google

SECTION III.

De la ligne courbe qui eſt circulaire.

Scholie.

LE nombre des differentes eſpeces de lignes courbes étant infini, l'ordre ne me permet pas de parler de toutes : je ne conſidere donc icy que la ligne courbe qui eſt circulaire, laquelle aprés la ligne droite eſt la plus ſimple, & la plus aiſée à connoître,

Premiere definition.

Une ligne courbe, ſur un plan, qui n'a ny commencement ny fin, & dont toutes les parties ſont également éloignées d'un même point, eſt un cercle; ce point dont toutes les parties de cette ligne ſont également éloignées, s'appelle le centre du cercle.

Scholie.

Concevons que dans la ligne A B l'extremité A eſt immobile pendant que B l'autre extremité tourne, ſi B laiſſe une trace, ce ſera un cercle dont toutes les parties ſont éloignées du point A d'un intervale égal, ſçavoir, A B, Ainſi A eſt le centre. Il eſt bon de conſiderer cette maniere dont un cercle ſe fait, qui eſt ſi uniforme qu'on ne peut concevoir aucune difference entre toutes ſes parties.

Seconde definition.

Les lignes menées du centre à la circonference, s'appellent rayons ou demy diametres.

Scholie.

A B eſt un rayon du cercle X.

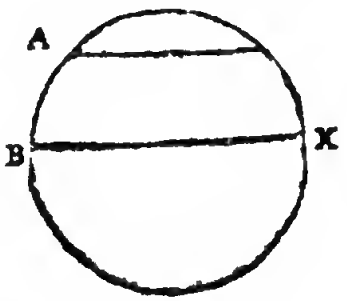
Troiſiéme definition.

Les lignes menées d'un point de la cir-

conference à un autre point, s'appellent cordes.

Scholie.

A eſt une corde du cercle X.



Quatriéme definition.

Les cordes qui paſſent par le centre s'appellent diametres.

Scholie.

La corde B qui paſſe par le centre du cercle X eſt le diametre de ce cercle.

Cinquiéme definition.

La partie de la circonference qui ſe trouve entre les extremitez d'une corde s'appelle arc.

Scholie.

Lors qu'une corde, comme eſt A dans le cercle X, ne paſſe pas par le centre, il y a deux portions de circonference, qui ſe terminent aux extremitez de cette corde, l'une plus grande, l'autre plus petite. Quand on parle de la corde d'un arc, ſi l'on n'ajoûte autre choſe, on entend l'arc qui n'eſt pas le plus grand.

Sixiéme definition.

Toute circonference ſe conçoit diviſée en trois cens ſoixante parties égales, qui ſe nomment degrez.

Septiéme definition.

Chaque degré ſe diviſe en ſoixante minutes, ou petites parties, qu'on appelle premieres, chaque minute ou premiere en ſoixante ſecondes, & chaque ſeconde en ſoixante troiſiémes: ainſi à l'infiny.

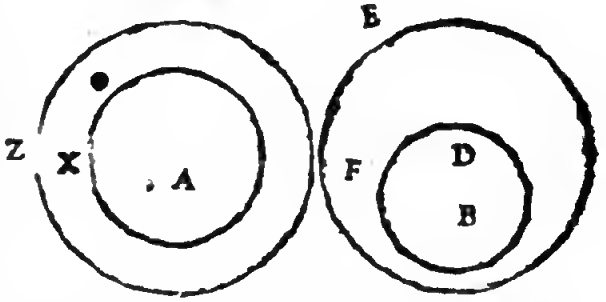
Huitiéme definition.

Cercles concentriques, ſont ceux qui ſont décris d'un même centre. Excen-

triques, qui n'ont pas même centre.

Scholie.

Z & X qui ont pour centre le même point A, ſont concentriques, & les cercles E & F qui ont pour centre D & B, deux points differens ſont excentriques.



Propoſitions naturellement connuës, touchant la ligne circulaire.

Premiere propoſition ou demande.

Un intervalle étant donné, on peut décrire une circonference.

Scholie.

Pour cela il faut qu'une des extremitez de la ligne droite, qui meſure cet intervalle, étant immobile, comme il a été dit cy-deſſus, l'autre extremité continuë de ſe mouvoir, juſques à ce qu'elle ſe trouve au point où elle avoit commencé ſon mouvement. L'inſtrument dont on ſe ſert ordinairement pour décrire un cercle eſt un compas.

Seconde propoſition ou demande.

Dans un même cercle, ou dans les cercles égaux, les arcs égaux ont des cordes égales, & les cordes égales ſont les cordes d'arcs égaux.

Troiſiéme propoſition ou demande.

Une corde ou diametre qui paſſe par le centre coupe le cercle en deux parties égales, qui s'appellent demie circonference.

Scholie.

Cette propoſition & la precedente ſont une ſuite de la ſimplicité & uniformité des cercles, dont toutes les parties étans faites de même maniere, on ne peut concevoir aucune difference entre elles.

Quatriéme propoſition ou demande.

Toutes les lignes tirées du centre, qui ſont plus petites que les rayons du cercle, ont leur extremité au dedans du cercle : que ſi elles ſont plus longues, elles l'ont au dehors : ſi égales, dans la circonference même.

Cinquiéme propoſition ou demande.

Les cercles ſont égaux dont les rayons ſont égaux.

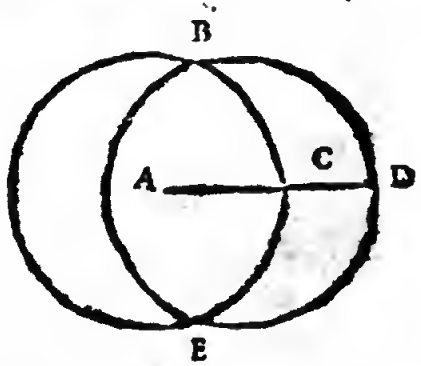
Scholie.

Ces propoſitions n'ont beſoin d'aucune explication.

Theorême premier.

Deux cercles qui ſe coupent ne ſont pas concentriques.

Les cercles BCE & BDE ſe coupent au point B. Le point A eſt le centre de BCE, je dis que ce point A ne peut être le centre de B D E ; s'il l'étoit, il s'enſuivroit une abſurdité, ſçavoir, que A C partie de A D ſeroit égale à A D. Car 1° A B & A C étans rayons d'un même cercle, ces deux lignes ſont neceſſairemẽt égales. 2° Si A eſt centre de BDE, les lignes AB & AD rayõs d'un méme cercle ſerõt auſſi égales, partant, puiſque deux choſes qui ſont égales à une troiſiéme, ſont égales entre elles, A C & A D étant égales à A B, ces deux lignes

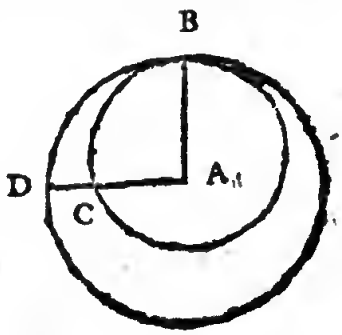


ſont égales ; mais la partie A C ne peut être égale à ſon tout AD : donc on ne peut pas dire que deux cercles qui ſe coupent ſoient concentriques.

Theorême ſecond.

Deux cercles qui ſe touchẽt ne ſont pas concẽtriques, ou n'ont pas même centre.

Le cercle BCB touche le cercle BDB lequel B D B a pour centre le point A, je dis que le cercle B C B a un autre centre. Si le contraire eſt vray, c'eſt à dire, que A ſoit le centre de ces deux cercles, il s'enſuivroit une abſurdité que A C ſeroit égal à AD la partie au tout. Car 1° les lignes A B & A D ſont les rayons de B D B, ainſi elles ſont égales. 2° Si A eſt le centre de BCB, il faut que A B & A C ſoient encor égales : donc A C & A D étant egales avec une 3me ligne, ſçavoir avec AB, elles ſont égales entre elles, la partie AC ſera égale à ſon tout AD : cela ne peut être ; ſi deux cercles ſe touchent donc ils ſont excentriques.

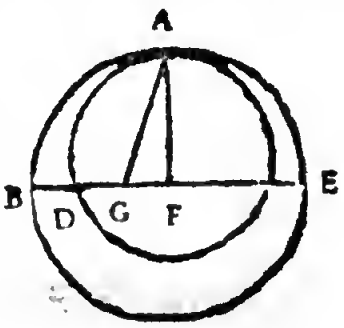


Theorême troiſiéme.

Si les deux cercles A B A & A D A ſe touchent l'un l'autre en dedans ; la ligne droite qui joindra leurs centres (qui ne ſont pas un même point par le Theor. 2e) étant prolongée tombera dans le point

d'attouchement de ces deux cercles.

Si on le nie,& qu'on ſuppoſe que leurs centres, qui par le 2e Theor. ſont differens, ſoient F & G par leſquels paſſe la ligne E B, qui ne tõbe point dans A où ſe touchent ces deux cercles,je mõtre qu'il s'enſuit que GD eſt plus grand que G B, & qu'ainſi la partie eſt plus grande que le tout, ce qui eſt abſurde.



Entre les deux points A & F la plus courte ligne eſt A F qui eſt droite ; ainſi A F eſt plus petite que A G + G F. Le centre de A B A eſt F, ainſi les rayons A F & F B ſont égaux, partant F B eſt plus petit que F G + G A, ôtant de F B & de F G + G A la partie qui leur eſt cõmune,ſçavoir,F G,le reſte G A ſera plus grand que GB.Or GD eſt égal à GA,puis qu'on ſupppoſe que G eſt le centre du cercle A D A, & qu'ainſi ils ſont rayons du même cercle : donc A G étant plus grand que GB, comme on l'a demontré, il faut que G D ſoit plus grand que GB, ce qui eſt l'abſurdité qu'il falloit prouver devoir ſuivre en niant le Theorême propoſé, qui par conſequent ne peut être conteſté.

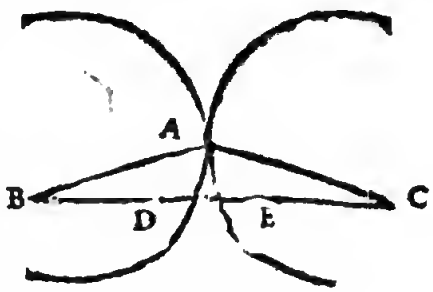
Theoréme quatriéme.

Si deux cercles ſe touchent en dehors,

la ligne droite menée par leurs centres paſſera par leur point d'attouchement.

Qu'ainſi ne ſoit, que le centre du cercle DAD ſoit B, & celuy du cercle EAE ſoit C,& que la ligne BC qui ne paſſe pas par A,point d'attouchement de ces deux cercles, joigne les deux centres B & C.

Pour démontrer le Theorême propoſé, il faut faire voir que de cette ſuppoſition il s'enſuit une abſurdité, ſçavoir que la ligne B C eſt plus grande que BA + AC contre ce qui a été dit que la ligne droite eſt la plus courte entre deux points.



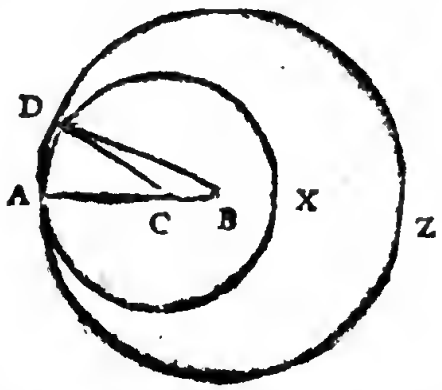
Les lignes BA & BD ſont égales étant rayons d'un même cercle. Les lignesCA & C E ſont auſſi égales par la même raiſon : donc ajoûtant à B D + CE la partie D E qui eſt entre ces deux cercles, alors BD + D E + E C ſera plus grand que B A + A C, ce qu'il faloit démontrer pour faire voir que ſi on nie le Theorême propoſé,il s'enſuit une abſurdité.

Theorême cinquiéme.

Deux cercles ne ſe peuvent toucher qu'en un point.

Que cela ne ſoit, & que les cercles Z & X ſe touchent dans les deux points

A & D. Par le ſecond Theorême ils n'ont pas même centre. Que celuy de X ſoit C, & que celuy de Z ſoit B : donc puiſque D & A ſont ſuppoſez dans la circonference de X & de Z, il faut que C A ſoit égal à CD, qu'ainſi BC + CA ſoit égal à B C + C D, & puiſque B eſt le centre de Z, il faut auſſi que B D ſoit égal à BC + CA. On vient de démontrer que B C + CA eſt égal à B C + CD : donc ces deux grandeurs BC + CD & BD étans égales à une troiſiéme, ſçavoir à BC + CA, elles ſont égales entre elles, ce qui eſt abſurde, la ligne droite B D étant plus petite que les lignes BC + CD par la definition de la ligne droite. Deux cercles ne ſe peuvent donc toucher en deux points,



SECTION IV.

De la differente poſition des lignes droites qui ſont entr'elles ou perpendiculaires, ou obliques, ou paralelles.

Scholie.

DEux lignes droites ne peuvent être diſpoſées qu'en ces trois manieres ; ou elles ſe rencontrent & ſe coupent, ou

elles ne ſe rencontrent point. Quand elles ſe rencontrent elles le peuvent faire de ſorte que l'une panche plus vers un côté que vers l'autre, ou qu'elle ne panche pas plus. On conſidere icy ces trois poſitions.

Des lignes perpendiculaires.

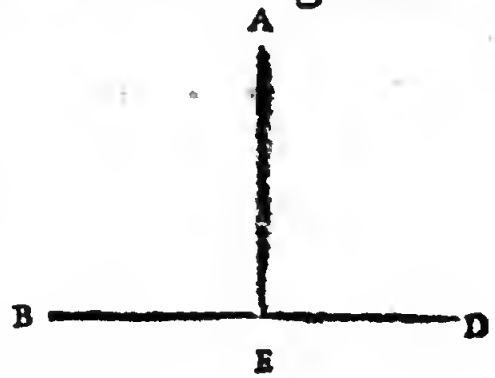
Definition.

Une ligne qui tombe ſur une autre ligne, ou qui la coupe, de ſorte qu'elle ne panche pas plus vers un côté de cette ligne qu'elle coupe que vers l'autre, s'appelle perpendiculaire.

Propoſitions naturellement connuës touchant les lignes perpendiculaires.

Premiere propoſition ou demande.

La ligne A E tombe ſur E milieu de B D. Si ſon ſommet A eſt également éloigné des extremitez B & D de la ligue B D, elle ne panche pas plus d'un côté que d'autre, ainſi elle eſt perpendiculaire ſur B D.



Scholie.

C'eſt une ſuite de la notion que la Definition precedente donne de la ligne perpendiculaire.

Seconde propoſition ou demande.

Si deux points de la ligne AE ſont également diſtans de B & de D, chaque point de la ligne AE ſera également diſtant de B & de D.

Scholie.

C'eſt une ſuite de ce que la poſition d'une ligne droite ne dépend que de deux points. On ne peut point concevoir que quelque point dans la ligne A E ſoit plus prés de B que de D qu'on ne conçoive que A E ſe courbe en ce point du côté de B, & qu'ainſi elle n'eſt pas une ligne droite, comme on ſuppoſe qu'elle l'eſt.

Troiſiéme propoſition ou demande.

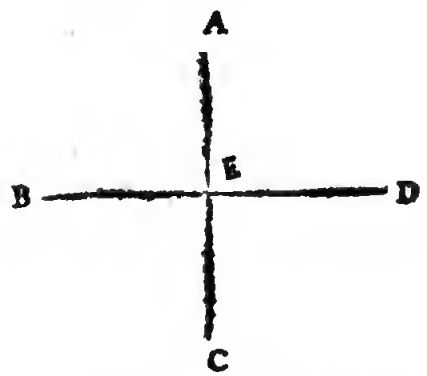
Si A E eſt perpendiculaire ſur B D, & que l'un de ſes points A ou E, ſoit également diſtant de B & de D, l'autre ſera également éloigné des mêmes points B & D

Scholie.

Car ſi A eſt également diſtant de B & D, & que E ne le ſoit pas, alors A E panchera plus d'un côté que d'autre, ainſi elle ne ſera pas perpendiculaire, contre la ſuppoſition qu'on fait qu'elle l'eſt.

Quatriéme propoſition ou demande.

Pour démontrer donc que la ligne AE eſt perpendiculaire ſur B D, il ſuffit de faire voir que deux de ſes points ſont chacun en égale diſtance des points B & D.



5e propoſ. ou dem.

Si la ligne A E eſt perpendiculaire ſur B D, la ligne E C qui eſt ſon prolongement, ſera pareillement perpendiculaire ſur B D.

Scholie.

Ce n'eſt qu'une même ligne droite, on ne peut pas concevoir la choſe autrement, à moins que A C ne ſe courbe vers B ou vers D.

Sixiéme

Sixiéme propoſition ou demande.

Si A C eſt perpendiculaire ſur B D, la ligne B D eſt perpendiculaire ſur A C.

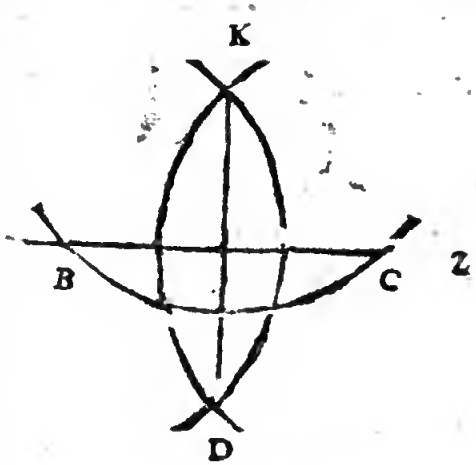
Scholie.

On ne peut concevoir que B panche plus vers A que vers C, qu'en même temps on ne conçoive que D panche plus vers C, & cela étant, A panchera plus vers B que vers D, car cela eſt reciproque. Ainſi A E ne ſeroit pas perpendiculaire ſur B D, contre la ſuppoſition. B D eſt donc perpendiculaire ſur A C, comme A C eſt perpendiculaire ſur B D,

Problême premier.

Du point K hors de la ligne Z tirer une perpendiculaire ſur Z.

1° De K comme centre, je décris l'arc B C, ainſi B & C qui ſont dans la circonference de ce cercle & dans la ligne Z, ſont également éloignez de K. 2° de C comme centre, & de l'intervale C K je décris un cercle, & du point B un ſecond du même intervale, ces deux cercles ſe coupent aux points K & D qui ſont ainſi également diſtans de B & de C. 3° Par K & D je mene une ligne droite, dans laquelle les deux points K & D étant par la conſtruction également éloignez de B & de C, il faut par la quatriéme demande cy-deſſus que cette ligne K D

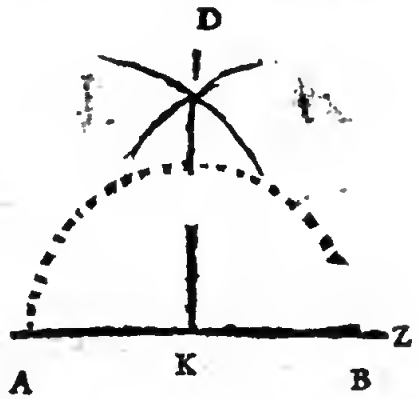


ſoit perpendiculaire ſur Z, ce qu'il faloit faire.

Problême ſecond.

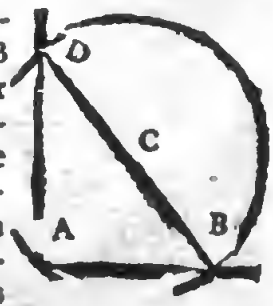
Du point K dans la ligne Z élever une perpendiculaire.

De K comme centre je décris un cercle qui coupe Z en deux points, qui ſont icy A & B, deſquels comme centres je décris deux autres cercles d'un même intervale pris à diſcretion, de ſorte que ces deux cercles ſe coupent. Je ſuppoſe que ce ſoit au point D : d'où ayant mené une ligne au point K, elle eſt la perpendiculaire que l'on cherche. Car par la conſtruction D eſt également éloigné de A & de B, dont le point K eſt auſſi également éloigné par la conſtruction; ainſi par la quatriéme demande cette ligne ayant deux de ſes points également éloignez de A & de B, elle eſt perpendiculaire ſur Z.



Scholie.

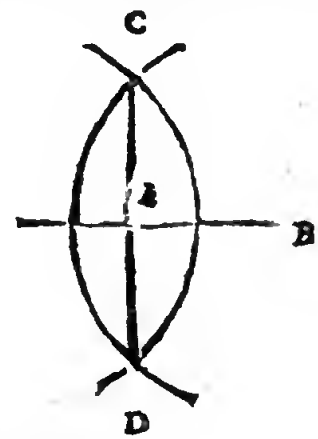
Lors que le point donné eſt ſur l'extremité de la ligne donnée, comme icy ſi A B eſtant la ligne donnée il faloit élever ſur A une perpendiculaire, je prends à diſcretion le point C, & ouvrant le compas de l'intervale A C je décris un cercle & je mene le diametre B D, & du point de ſection D, je tire une autre ligne au point A, qui ſera la perpendiculaire qu'on vouloit élever : ce que l'on ne peut pas démontrer en ce lieu,



Corollaire.

De là nous apprenons comment l'on peut couper une ligne en deux parties égales.

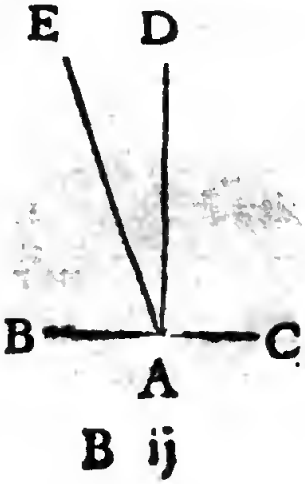
Sôit A B une ligne droite de A & de B comme centres, je fais d'un même intervale pris à diſcretion deux cercles qui ſe coupent en C & D, par où je mene une ligne qui eſt perpendiculaire ſur A B, puiſque D & C ſont également éloignez de A & de B. Or par la ſeconde demande le point E commun aux deux lignes D C & A B, eſt également éloigné de A & de B, ainſi A E eſt égale à E B, par conſequent la ligne A B eſt coupée par la moitié.



Theorême premier.

On ne peut élever ſur un même point dans une ligne plus d'une perpendiculaire.

Sur le point A, dans la ligne B C, également diſtant de B & de C, ſoit élevée la perpendiculaire A D, il eſt viſible que ſi on en vouloit élever une autre ſur le même point A



on ne le pourroit faire que cette ligne telle qu'A E, ne fût plus d'un côté que d'autre, comme icy plus vers B que vers C, ce qui eſt directement contraire à la definition des lignes perpendiculaires.

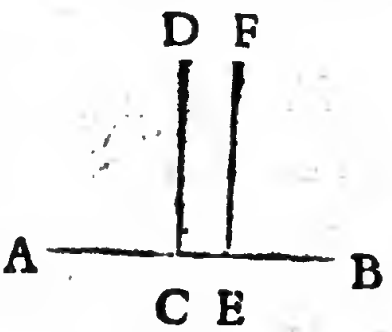
Scholie.

C'eſt une ſuite de la notion que nous avons donnée de la perpendiculaire, qu'elle eſt éloignée également de part & d'autre des extremitez de la ligne ſur le milieu de laquelle elle tombe ; or il ne ſe peut pas faire que deux differentes lignes ſoient dans le même éloignement de ces mêmes extremitez.

Theorême ſecond.

Si la ligne C D tombe perpendiculairement ſur le milieu de la ligne A B, elle paſſe par tous les points qui ſont également éloignez de A & B extremitez de la ligne A B.

Si on le conteſte & qu'on veüille dire que le point F par où C D ne paſſe pas, eſt également éloigné de A & de B, de ce point ſoit mené ſur A B une perpendiculaire, qui par le precedant Theorême ne tombera pas ſur C, car il y auroit deux perpendiculaires ſur C, ce ſera donc ailleurs. Que ce ſoit au point E. Puiſque F eſt ſuppoſé également diſtant de A & de B par la quatriéme demande, le point E ſera également diſtant de A & de B : or C par l'hipotheſe eſt auſſi également diſtant

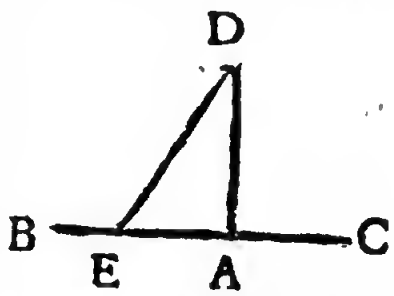


de A & de B, donc A C ſera égal à A E, ce qui eſt abſurde. Si la ligne CD tombe, donc, &c.

Theorême troiſiéme.

On ne peut mener plus d'une perpendiculaire d'un même point ſur une ligne.

La ligne A D tombe perpendiculairement ſur le milieu de la ligne B C, je dis qu'on ne peut du même point D mener d'autres lignes perpendiculaires ſur B C, car ces lignes tomberont de part ou d'autre de A, que ceſoit en E. Alors par la troiſiéme demande, le point E eſt également diſtant de B & de C, donc B E eſt moitié de cette ligne. Mais A B en eſt auſſi la moitié, ainſi B A eſt égal à B E, ce qui eſt abſurde. Partant on ne peut pas dire qu'on puiſſe mener plus d'une perpendiculaire d'un point ſur une ligne.



Scholie.

C'eſt encore une ſuite de la notion de la perpendiculaire qu'elle eſt également éloignée des extremitez de la ligne ſur le milieu de laquelle elle tombe. Deux differentes lignes ne peuvent pas être chacune également éloignées des extremitez de la ligne ſur laquelle elles tombent.

Corollaire.

Dans un plan deux lignes qui ſont perpendiculaires ſur une troiſiéme, ne ſe peuvent rencontrer.

Car ſi elles ſe rencontroient, ou ſe

coupoient, du point de cette rencontre ou ſection il y auroit deux perpendiculaires ſur la même ligne, ce que l'on vient de démontrer être impoſſible.

Scholie.

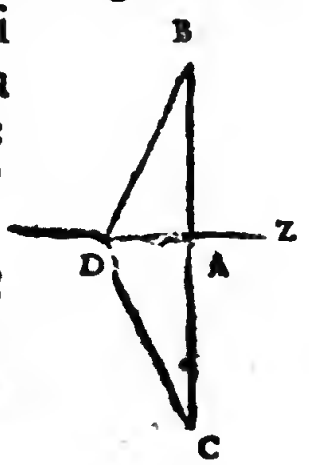
L'on meſure la diſtance d'un point à une ligne par une perpendiculaire, parce que c'eſt la meſure la plus ſimple & la plus conſtante, puis qu'on ne peut mener d'un point à une ligne qu'une ſeule perpendiculaire ; & qu'outre cela elle eſt plus courte que toute autre ligne qu'on tire du même point à la même ligne, comme on le va faire voir dans le Theorême ſuivant.

Theorême quatriéme.

La perpendiculaire eſt la plus courte de toutes les lignes qui puiſſent être menées d'un point à une ligne.

La ligne B A eſt perpendiculaire ſur Z, il faut démontrer quelle eſt la plus courte de toutes les lignes qui puiſſent être menées du point B ſur la ligne Z.

Prolongez B A juſques en C, en ſorte que B A ſoit égale à A C, la ligne D A eſt perpendiculaire ſur B C par la ſixiéme demande, donc D eſt également éloigné de B & de C, ainſi B D eſt égal à D C, mais la ligne droite B C eſt plus courte que la ligne B D C par la 3e propoſition §. 2. Donc A B, moitié de B C eſt plus courte que B D moitié de B D+D C, ce qu'il faloit démontrer.



Scholie.

C'eſt auſſi une ſuite de la nature de la perpendiculaire qui

ne s'écartant point & s'éloignant également des extremitez de la ligne ſur le milieu de laquelle elle tombe, elle va par le chemin le plus droit, & par conſequent le plus court.

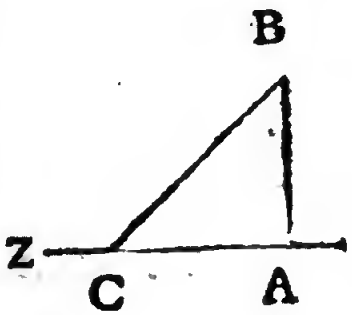
Des lignes obliques.

Definition.

Les lignes obliques ſont celles qui panchent plus vers un côté que vers l'autre.

L'on meſure leur obliquité par l'éloignement que leur pied a du pied d'une perpendiculaire tirée d'un de leurs points ſur l'autre ligne.

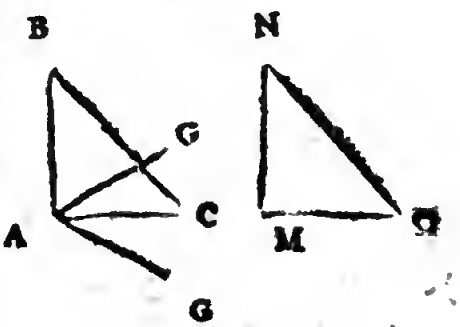
CB eſt une ligne oblique ſur Z, ſi AB eſt perpendiculaire ſur Z, la ligne CA, qui eſt la meſure de l'éloignement du perpendicule, eſt auſſi la meſure de l'obliquité de BC.



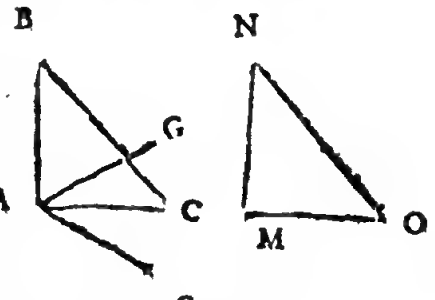
Theorême cinquiéme.

S'il y a égalité dans la perpendiculaire, & dans l'éloignement du perpendicule, les lignes obliques ſont égales.

Si AB=MN & AC=MO je dis que BC=NO, que cela ne ſoit, concevons que MN ſoit poſé ſur AB, ces deux lignes étant égales,



elles conviendront : ſi M O ne convient pas avec AC qui luy eſt égale, qu'elle convienne avec A G, donc puiſque O M eſt perpendiculaire ſur M N, il faut que A G ſoit perpendiculaire ſur A B, qui eſt la même que M N, ainſi ſur A il y a deux perpendiculaires, ce que nous avons démontré ne pouvoir être.

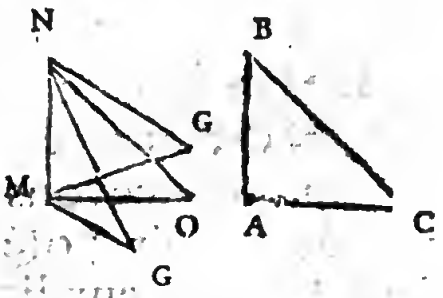


Il faut donc que M O convienne avec A C, ainſi O avec C, comme N avec B, partant les deux lignes O N & B C entre mêmes points ſont égales, ce qu'il faloit démontrer.

Theorême ſixiéme.

S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans la ligne oblique, il y a égalité dans l'éloignement du perpendicule.

Si A B=M N & B C=N O, je dis que C A=MO ; poſez A B ſur M N, ces deux lignes étant égales, elles conviendront. Si on dit que BC ne convient pas avec N O qui luy eſt égale, mais avec N G, je dis qu'il s'enſuit une abſurdité.



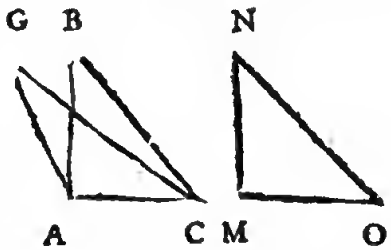
Car, puiſque dans cette ſuppoſition

B C convient avec N G, il faut que AC convienne avec M G; ainſi M G ſera perpendiculaire ſur M N, qui eſt la même ligne que A B, ſur laquelle C A eſt perpendiculaire, par conſequent ſur M N au point M il y a deux perpendiculaires, ſçavoir M O & M G, ce qui eſt abſurde. B C conviendra donc avec N O, partant A avec M & C avec O : ainſi les lignes C A & M O étant entre mêmes points, ſont égales : ainſi les éloignemens du perpendicule ſont égaux, ce qu'il faloit démontrer.

Theorême ſeptiéme.

S'il y a égalité dans la ligne oblique, & dans l'éloignement du perpendicule, les perpendiculaires ſont égales.

Si B C, = N O, & A C, = M O, je dis que A B, = M N, cela ſe démontre par la même voye que le precedent Theorême. Il faut concevoir que O M eſt poſée ſur A C, qui doivent convenir, ſi N O ne convient pas avec C B, mais avec C G, & par conſequent que M N convienne avec A G, il s'enſuivroit que les deux lignes A G, & A B, ſeroient perpendiculaires ſur A C, ce qui eſt impoſſible (par le premier Theorême) Il faut donc que O N convienne avec C B, le point A avec M, & B



avec N; ainſi que les lignes AB, & M N, étans entre mêmes points, elles ſoient égales, ce qu'il faloit démontrer.

Des lignes paralelles.

Definition.

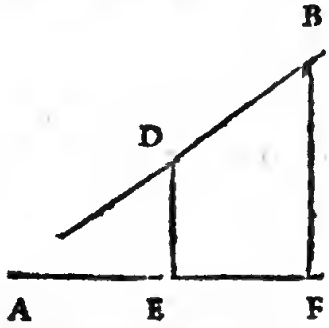
Deux lignes droites qui ſont également diſtantes l'une de l'autre, chacune dans deux de leurs points (& par conſequent dans toutes leurs parties) ſont dites paralelles.

propoſition ou demande.

Deux lignes droites qui eſtant prolongées à l'infiny, ne ſe rencontrent point, ſont paralelles.

Scholie.

Les lignes droites qui ne ſont pas paralelles ſe rencontrent neceſſairement: car, par exemple, ſi A F & B D s'approchent d'un côté, & qu'au point D la ligne B D ſoit plus proche de A F, de la valeur de la moitié de B F que je ſuppoſe égale à D E, ſi A E eſt moitié de A F, & qu'on prolonge B D, comme elle s'approchera uniformément ſelon la nature des lignes droites, vis à vis de A, elle ſera approchée de la ligne A F de la valeur D E, ainſi elle ne ſera point éloignée de A, par conſequent elle rencontrera la ligne A F dans ce point: il n'en eſt pas de même d'une ligne courbe avec une ligne droite. La courbe en s'approchant toujours, de quelque choſe, de la droite, elle le peut faire par des degrés, qui vont en diminuant, à meſure qu'on la prolonge, de ſorte qu'elle ne la rencontre jamais, comme l'on le démontre dans les Elemens des lignes courbes.

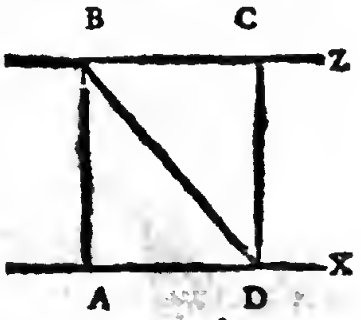


Lemme premier.

Si A B, & C D, ſont perpendiculaires

ſur X, paralelle à Z, elles ſont égales.

La diſtance de B & C de la ligne X ſe meſure par les perpendiculaires A B & C D. Ces deux points ſont en même diſtance de X, puiſque Z & X ſont paralelles, donc ces perpendiculaires ſont égales ; ce qui ſe démontrera en la même maniere de toutes les autres perpendiculaires entre Z & X.



Lemme ſecond.

Deux ou pluſieurs lignes perpendiculaires ſur une même ligne ſont paralelles entre elles.

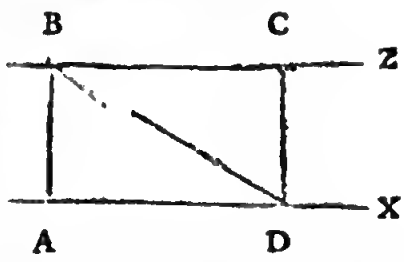
Par le Corollaire du Theorême 3e *ſupr.* les lignes perpendiculaires ſur une même ligne ne ſe rencontrent point, donc par la demande precedente elles ſont paralelles.

Lemme troiſiéme.

Entre deux paralelles les lignes qui ſont perpendiculaires ſur l'une, le ſont ſur l'autre.

Z & X ſont paralelles, la ligne A B eſt perpendiculaire ſur Z, ſi elle ne l'eſt pas ſur X ; du point B je mene ſur X la perpendiculaire B D, & de D ſur Z la perpendiculaire DC ; ainſi BA, n'étant pas perpendiculaire ſur X, la ligne BD ſera plus courte, par le theorême quatrié-

me, *sup.* & par la même raiſon D C, ſera plus courte que B C, & partant plus que A B, ainſi la ligne Z dans le point C s'approchera plus de X, que dans le point B, par conſequent elle n'eſt point paralelle, ce qui eſt contre la ſuppoſition. Deux lignes donc étant paralelles, la ligne qui eſt perpendiculaire ſur l'une, l'eſt ſur l'autre, ce qu'il faloit démontrer.



Lemme quatriéme.

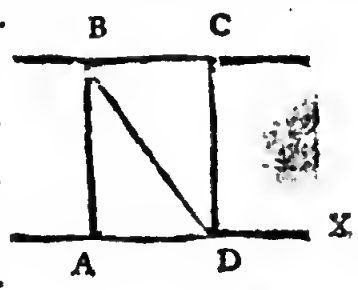
La ligne A ne peut être perpendiculaire ſur B & ſur C, deux differentes lignes, qu'elles ne ſoient paralelles.

Car ces deux lignes B & C ſont perpendiculaires ſur A par la demande cinquiéme, *ſup.* donc par le Theorême ſecond, *ſup.* elles ne ſe rencontrent point; ainſi par la demande precedente elles ſont paralelles.

Problême troiſiéme.

Par un point donné, mener une ligne paralelle à une ligne donnée.

Soit X la ligne donnée, & B le point dõné. de B j'abaiſſe la perpendiculaire BA ſur X & ſur AB j'éleve au point B la perpendiculaire B C, qui ſera la ligne paralelle que l'on cherche par le Lemme quatriéme, *ſup.*

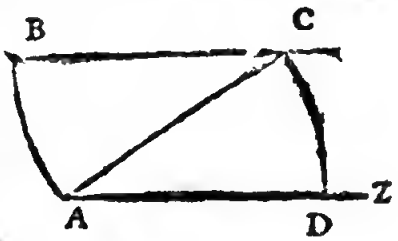


Autre maniere.

J'éleve ſur X une ſeconde perpendiculaire D C que je fais égale à A B, & je tire par B & C la ligne Z qui ſera la paralelle que l'on cherche, puiſque les deux lignes Z & X ſeront en égale diſtance l'une de l'autre.

Scholie.

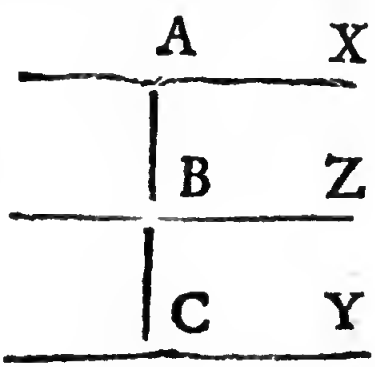
On fait la même choſe plus facilement en cette maniere, le point donné eſt C, de ce point comme centre, & d'un intervalle pris à diſcretion, je fais le cercle A B, & du point A, & de même intervalle, le cercle D C, je prens l'arc A B égal à l'arc D C, & par C & B, je mene une ligne qui ſera la paralelle que l'on cherche.



Theorême huitiéme.

Deux lignes paralelles à une troiſiéme ſont paralelles entr'elles.

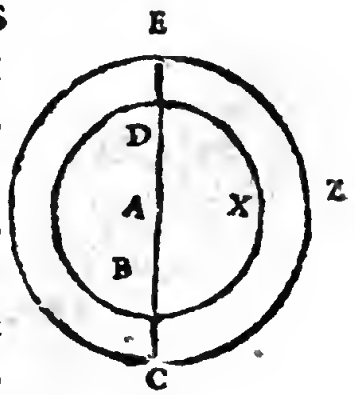
X & Y ſont paralelles avec Z. de X je mene A B, perpendiculaire ſur Z, laquelle étant prolongée juſques en C, puis qu'elle eſt perpendiculaire ſur Z, elle ſera par le Lemme troiſiéme, *ſup.* perpendiculaire ſur Y, paralelle avec Z, & puiſque Z eſt paralelle avec X, cette ligne perpendiculaire ſur Z le ſera auſſi par le Lemme troiſiéme, *ſup.* ſur X paralelle avec Z. Ainſi puiſque X & Y ſont perpendiculaires ſur A C, elles ſont paralelles



entr'elles par le Lemme quatriéme, *ſup.* ce qu'il faloit démontrer.

Theorême neuviéme.

Deux ou pluſieurs cercles concentriques ſont paralelles, ou la diſtance entre leurs circonferences eſt égale.



Il eſt evident que les cercles X & Z étant concentriques BC=DE, car AC=AE & AB=AD de choſes égales, ôtant choſes égales, de AC la ligne AB, & de AE la ligne AD, les reſtes BC & DE doivent être égaux.

SECTION V.

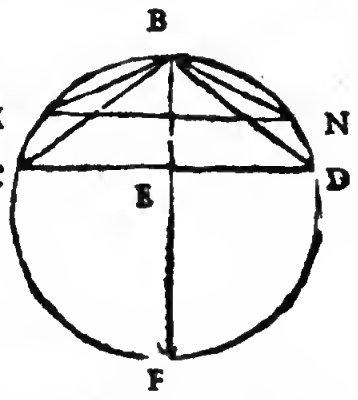
Des lignes terminées à une circonference.

Theorême premier.

LA ligne BF perpendiculaire ſur la moitié de la corde CD, coupe par la moitié les arcs CBD, CFD auſſi-bien que le cercle, & paſſe par le centre.

1° Puiſque les points B & F ſont également éloignez de C & de D, tous les points de BE, par la ſeconde demande §. 4. ſeront également éloignez de C &

de D, donc B C = B D & F C = F D, donc B C + C F = B D + D F, ainſi B F coupe les arcs & le cercle en deux parties égales. 2° La perpẽdiculaire B F paſſe par tous les points également éloignez de C & de D par le ſecond Theorême, § 4. Or le centre de ce cercle eſt également éloigné de ces deux points C & D; donc B F paſſe par ce centre.



Corollaire premier.

Donc pour couper un arc en deux parties égales il faut élever ſur la moitié de ſa corde une perpendiculaire.

Corollaire ſecond.

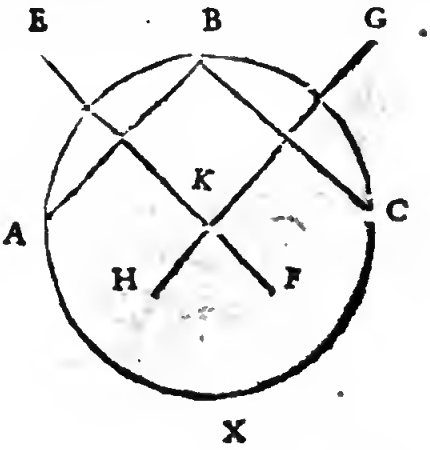
Ayant mené M N paralelle à la corde C D, les arcs entre ces paralelles ſont égaux.

Car B E étant perpendiculaire ſur C D, elle l'eſt ſur la paralelle M N, par le Lemme troiſiéme § 4e. Donc les lignes droites ou cordes B M, & B N, ſont égales, les cordes B C, & B D, ſont auſſi égales, donc les arcs de ces cordes égales ſont égaux par la deuxiéme demande §. 3. Otant donc choſes égales de choſes égales, l'arc B C moins, l'arc B M eſt égal à l'arc B D, moins l'arc B N, c'eſt à dire que l'arc M C eſt égal à l'arc N D.

Problême premier.

Trois points A, B, C, étant donnez trouver le cercle X, qui paſſe par ces trois points.

Je joints ces trois points par deux lignes, ſur le milieu deſquelles j'éleve les perpendiculaires E F, & G H, leſquelles par le Theoréme precedent, paſſent par le centre de X. Il faut donc que le centre de X ſe trouve en ces deux lignes, & par conſequent au point K où elles ſe coupent. Ainſi on voit ce qu'il faut faire pour trouver le cercle X.



Scholie.

Si les trois points donnez étoient dans une ligne droite, la queſtion auroit été impoſſible, comme il eſt evident; car alors les deux perpendiculaires EF & GH ne ſe coupetoient pas étant paralelles, ſelon ce qui a été démontré cy-deſſus Lemme 4.

Corollaire premier.

Deux cercles ne peuvent pas avoir trois points communs, comme A, B, C, qu'ils ne les ayent tous.

Car ces deux cercles auroient K pour centre, & ſeroient décrits d'un même intervalle, ainſi ils ne ſeroient qu'un même cercle.

Corollaire ſecond.

Deux cercles ne ſe peuvent couper en plus de deux points.

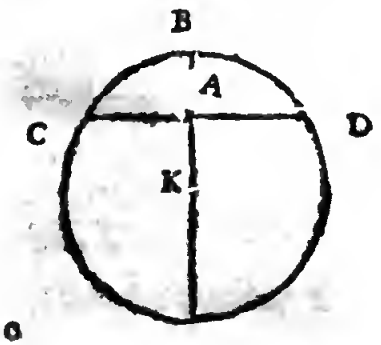
Car

Car s'ils ſe coupoient en trois, ils auroient trois points communs, ainſi par le Corollaire precedant ce ne ſeroit pas deux differens cercles.

Theoréme ſecond.

Si la ligne B K paſſe par le centre K, & coupe la ligne C D, ou l'arc C B D par la moitié, elle eſt perpendiculaire ſur la ligne C D.

Car il y a dans cette ligne B K deux points, ſçavoir A ou B, & K également éloignez de C & de D, puiſque A eſt la moitié de la ligne CD, & B moitié de l'arc C B D, & que K eſt le centre du cercle. Donc BK eſt perpendiculaire, par la notion qu'on a donnée de cette ligne.



Theorême troiſiéme.

Si la ligne B.K paſſe par le centre K, & eſt perpendiculaire ſur C D, elle coupe C D par la moitié.

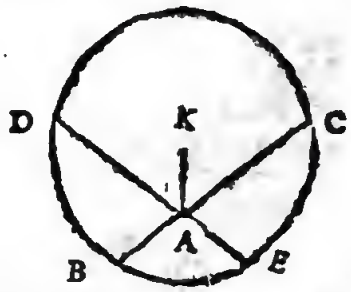
Puiſque K eſt le centre, ce point eſt également éloigné de C & de D: & puiſque B K eſt perpendiculaire, le point A & tous les autres de B K doivent être également éloignez de C & de D par la troiſiéme demande § 4 : donc CD eſt coupé par la moitié.

Theorême quatriéme.

Les deux cordes B C & D E qui ne

paſſent pas par le centre, ne ſe peuvent couper par le milieu.

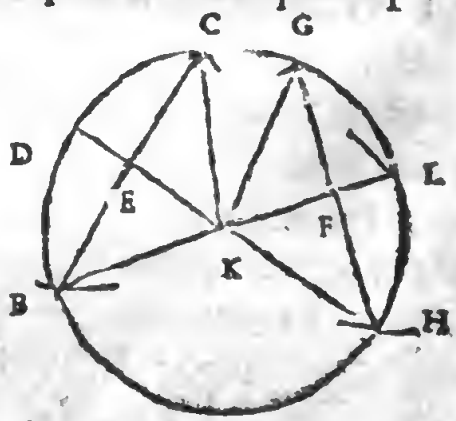
Si ces deux cordes ſe coupent en A, qui n'eſt pas le centre, & que ce point ſoit le milieu de ces deux lignes, ayant mené de A une ligne au centre K, cette ligne KA, par le Theorême ſecond *ſup.* ſera perpẽdiculaire ſur B C & ſur D E, & par la Demande ſixiéme, §. 4, B C & D E ſeront perpendiculaires ſur K A, ainſi ſur le méme point A il y a deux perpendiculaires, ce qui eſt contre le Theorême 1er §. 4e.



Theorême cinquiéme.

Les cordes B C & G H qui ſont également éloignées du centre K ſont égales, & ſi elles ſont égales, leurs diſtances du centre, ſçavoir, K E & K F ſont égales.

Je mene ſur ces cordes les perpendiculaires D K & K L qui les coupent par le milieu. Par l'hypotheſe K E = K F, & puiſque les rayons d'un même cercle ſont égaux B K = K H & K C = K G : donc l'oblique K B étant égale à l'oblique K H, & les perpendiculaires



KE & K F de ces obliques étant égales, par le Theorême 6e § 4 B E = H F : par la méme voye on prouve que EC = FG, qu'ainſi BC = HG, ce qu'il faloit prouver. La ſeconde partie ſe démontre par le Theor. 7e § 4 cy-deſſus, où l'on montre que les obliques comme KB & KH étant égales, & les diſtances BE & HF du perpendicule étant égales, les perpendiculaires K E & *K* F ſont égales.

Theorême ſixiéme.

De toutes les cordes d'un cercle, celle qui paſſe par le centre eſt la plus grande

Le centre eſt *K*, le diametre ou la corde qui paſſe par le centre eſt B A. Il faut prouver que B A eſt plus grande que C D, & que toute autre corde qui ne paſſe pas par le centre *K*

K C = *K*B & *K*D = *K* A, ainſi BA = KC + KD. or KC + *K*D eſt plus grand que C D ; donc B A eſt plus grand que CD : cette démonſtration s'applique à toute autre corde.

Des lignes tangentes.

Definition.

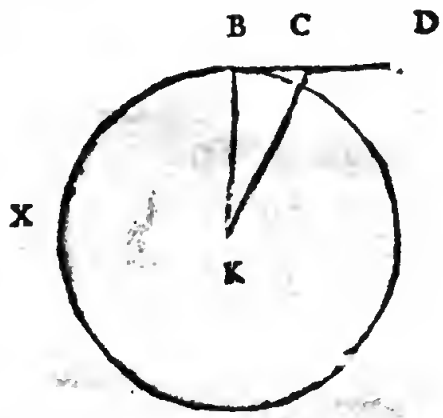
Une ligne qui touche un cercle ſans entrer dedans, quoy qu'elle ſoit prolongée, s'appelle tangente de ce cercle.

Theorême ſeptiéme.

Une ligne perpendiculaire à l'extremité d'un rayon, touche le cercle, & ne le touche qu'en un ſeul point.

B D eſt perpendiculaire ſur B *K*, il faut prouver que cette ligne ne touche le cercle X qu'au point B.

Si on dit qu'elle le touche dans un ſecond point, comme en C, je mene de *K* à C une ligne, laquelle n'eſt pas perpendiculaire ſur BD, puis qu'on ne peut mener de K ſur B D qu'une ſeule perpendiculaire, par le Theoréme 1er § 4; elle eſt donc plus grãde par le Theor. 4e § 4, que le rayon BK, qui eſt perpendiculaire ſur B D, partant le point C eſt hors le cercle, ainſi BD ne le touche pas en ces deux points B & C, mais ſeulement en B.

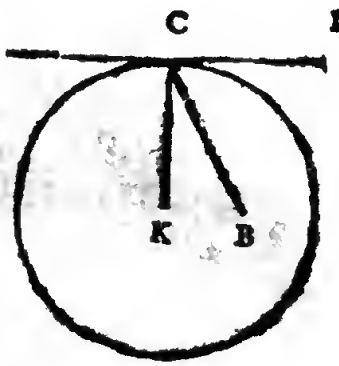


Theorême huitiéme.

Si au dedans d'un cercle on tire une ligne qui ſoit perpendiculaire ſur le point de l'attouchement de la tangente, cette perpendiculaire paſſera par le centre de ce cercle.

C D eſt une tangente du point C d'attouchement, je mene au dedans du cer-

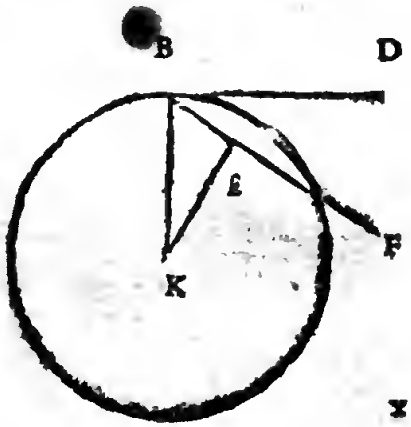
cle une perpendiculaire, je dis qu'elle paſſe par le centre K; ſi on veut que ce ſoit par B qui n'eſt pas le centre, je prouve qu'on n'a pas raiſon, car de K ayant mené le rayon K C, par le Theorême ſeptiéme, C D eſt une ligne tangente, donc elle eſt perpendiculaire ſur C K, ainſi il y auroit ſur C deux perpendiculaires K C & B C, ce qui ne peut étre par le Theor. 1er § 4 *ſup.*



Theorême neufiéme.

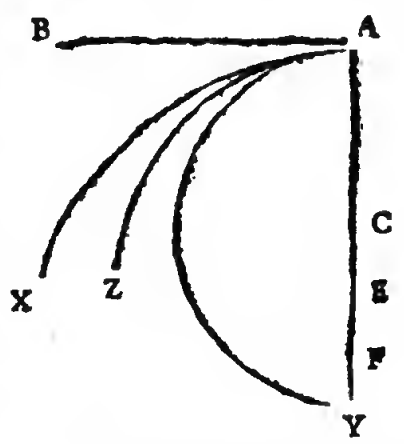
Entre une tangente & la circonference d'un cercle on ne peut mener aucune ligne droite, mais on peut mener un nombre infiny de lignes circulaires.

Si entre BD tangente & le cercle X, on peut mener quelque ligne droite qui partage l'eſpace entre B D la tangente & le cercle, que ce ſoit la ligne B F, ſur laquelle je mene du point K une autre ligne qui luy ſoit perpendiculaire, ſavoir K E, qui par le Theorême 4e § 4 ſera plus courte que le rayon B K, qui n'eſt pas perpendiculaire ſur cette ligne, ainſi K E étant



plus petite que le rayon B K, ſon extremité E eſt au dedans du cercle, Par conſequent la ligne BF n'eſt pas hors du cercle, ainſi elle ne partage pas l'eſpace qui eſt entre luy & la tangente BD.

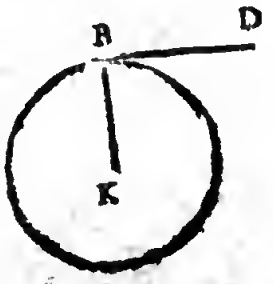
Mais entre A B la tangente & le cercle Y, on peut faire paſſer une infinité de cercles, car ayant prolongé le rayon A C au dedans du cercle, & de E comme centre & de l'intervalle E A ayant fait le cercle Z, la ligne AB ſera tangente à ce cercle, par le Theor. 7e *ſup.* lequel étant plus grand, ſera au dehors du cercle Y. Pareillement le cercle X, dont le centre eſt F, ſera encore entre AB & Y, ainſi à l'infini. Par conſequent entre la tangente A B & le cercle Y on peut faire paſſer une infinité de lignes circulaires.



Problême ſecond.

Mener une ligne droite qui touche un cercle dans un point donné.

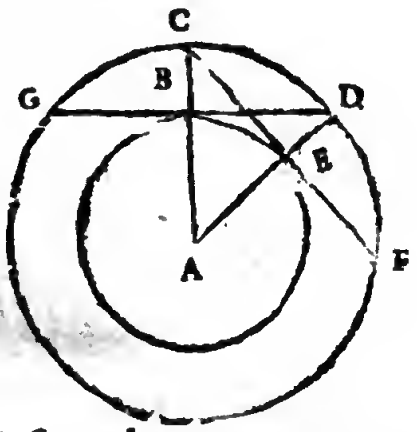
Le centre eſt K, le point donné B, je mene le rayon K B, & ſur ſon extremité B, j'éleve perpendiculairement BD qui par le Th. 7e *ſup.* ſera la tangente qu'il faloit faire



Problême troiſiéme.

D'un point donné hors le cercle tirer une tangente.

Le cercle eſt BEB, le point donné eſt C, duquel je mene une ligne au centre A & au point B, où cette ligne coupe le cercle, par le Problême precedant je fais la tangente G D. Je décris un cercle concentrique par C, & de D où ce cercle eſt coupé par la tangente G D je prends D F égale à D C, je joins C & F par une ligne qui ſera la tangente.



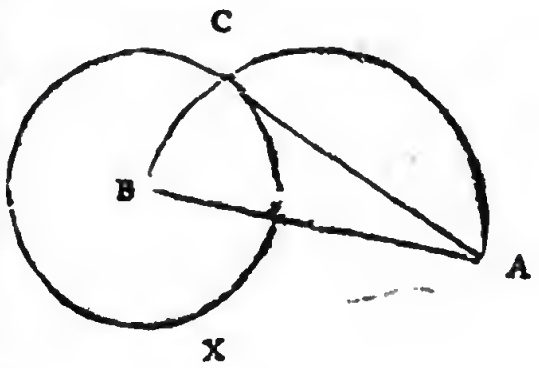
Par la conſtruction la corde G D = C F, car l'arc G C eſt égal à l'arc C D, & l'arc C D à l'arc D F, ainſi les arcs G D & C F étans égaux, leurs cordes ſont égales.

Je mene de D au centre A la ligne A D qui ſera perpendiculaire ſur C F, puiſque deux de ſes points, ſçavoir A & D ſont également éloignez de ſes extremitez : or puiſque les cordes D G & C F ſont égales, les lignes AB & AE ſont égales, par le Theorême cinquiéme *ſup.* Donc le point E auſſi-bien que B eſt dans le cercle BEB, ainſi la ligne C F étant perpendiculaire ſur E extremité du rayon AE elle touche le cercle, par

le Theorême ſeptiéme *ſup.*

Scholie.

Ce Problême ſe pratique plus facilement : ſoit A le point donné, duquel il faut mener une tangente au cercle X aprés avoir tiré la ligne A B de A à B centre du cercle X, il faut décrire ſur cette ligne le cercle A B C, & au point de ſection C mener A C qui ſera la tangente qu'on cherchoit, ce que l'on ne peut pas démontrer en ce lieu.



ELEMENS DE GEOMETRIE, OV DE LA MESVRE DV CORPS.

LIVRE SECOND.

De la ſeconde dimenſion du Corps.

SECTION PREMIERE.

Des Surfaces droites ou planes compriſes entre deux lignes qui ſe coupent, ce qui s'appelle, Angle.

Premiere definition.

VNE ſurface plane compriſe entre deux lignes droites qui ſe joignent en un point, & qui ſe

coupent étans prolongées, ſe nomme Angle plan.

Seconde definition.

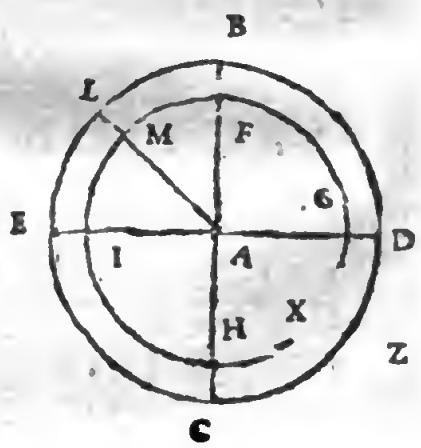
Ces deux lignes qui renferment cet eſpace, qu'on appelle Angle, ſont les côtez de cet Angle. Le point où ces deux lignes ſe coupent eſt le ſommet de l'Angle.

Lemme.

Deux ou pluſieurs cercles étant concentriques, les lignes menées du centre, qui diviſent en tant de degrez la circonference de l'un, diviſent ſemblablement en autant de degrez celle des autres cercles.

1° Il eſt evidant que E D étans diametre du cercle Z,& ſa partie I G étant diametre de X, cette ligne coupe par la moitié ces deux cercles qu'on ſuppoſe concentriques.

2°Supposãt que BC qui paſſe par le centre A eſt perpendiculaire ſur la ligne E D, le point B ſera également éloigné de E & de D, par la notion de la perpẽdiculaire,ainſi l'arc B E=BD, & par la même raiſon comme le point F eſt également éloigné de I & de G, l'arc FI=FG; ainſi BC cou-



pe encore ſemblablement ces deux cercles.

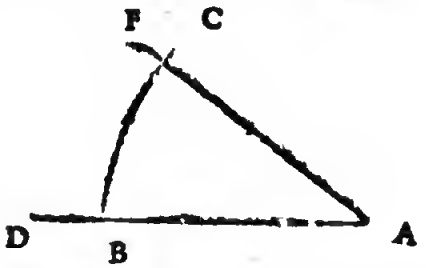
3° Je diviſe l'arc B E en deux parties égales au point L : donc concevant que l'on poſe L A B ſur L A E ces deux grandeurs conviendront, A B conviendra avec A E ; partant A F avec A I, qui luy eſt égale, & F avec I, partant l'arc F M avec I M, ainſi ces deux arcs ſont égaux : donc comme L B ou L E eſt moitié du quart de Z, il faut que F M, ou I M ſoit moitié du quart de X, ainſi deux ou pluſieurs cercles, &c.

Troiſiéme definition.

La meſure d'un angle eſt la portion d'un cercle dont le centre eſt au ſommet de cet angle, laquelle portion eſt compriſe entre les côtez de ce même angle.

Scholie

L'angle BAC eſt meſuré par la portion du cercle B C renfermée entre les côtez de l'angle, ſçavoir F A & DA: le point A eſt le centre du cercle dont B C eſt portion.

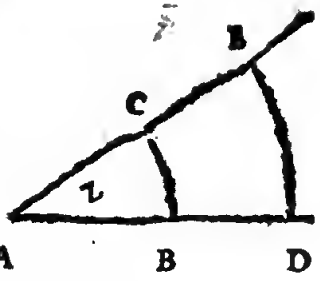


Theorême premier.

La grandeur d'un angle ne dépend point de la grandeur de ſes côtez.

Soit l'angle Z, ayant décrit de A ſon ſommet deux ou pluſieurs cercles concentriques, les arcs E D & C B, par le Lemme precedant ſont d'un égal nombre de degrez, & quoy qu'on prolonge

les côtez A D & A E à l'infini, les arcs entre ces lignes ſeront toujours ſemblables ou d'un égal nombre de degrez, partant cet angle Z, ſoit qu'on le meſure par l'arc C B, ou par l'arc D E, aura toujours la même meſure. Ainſi il ne dépend point de la grandeur de ſes côtez.

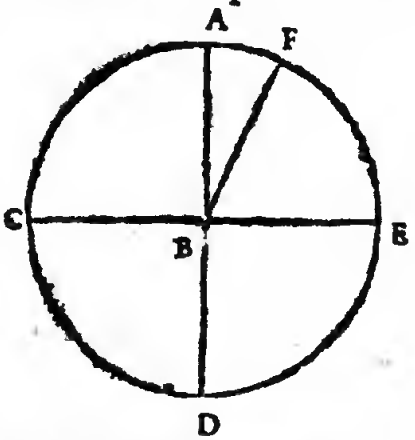


Quatriéme definition.

Un angle qui eſt meſuré par un arc de nonante degrez, qui ſont le quart du cercle, eſt droit.

Scholie.

Ainſi ſuppoſant que l'arc AC eſt le quart de la circonference A C D E, & par conſequent de nonante degrez, qui ſont le quart de trois cens ſoixante degrez que vaut tout le cercle, l'angle A B C qui a pour meſure cet arc A C eſt droit.



Cinquiéme definition.

Un angle qui a pour ſa meſure un arc de plus de nonante degrez eſt dit obtus.

Scholie.

L'Angle F B C eſt obtus, parce que l'arc F C qui le meſure eſt de plus de nonante degrez, puis qu'il eſt plus grand que le quart de cercle A C.

Sixiéme definition

Un angle qui a pour ſa meſure un arc qui a moins de nonante degrez, eſt appellé aigu.

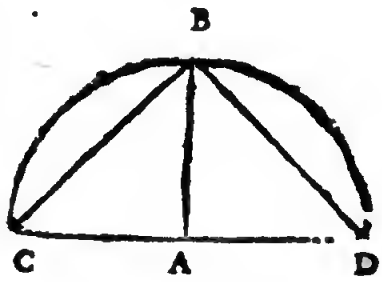
Scholie.

L'angle F B E eſt aigu, parce qu'il eſt meſuré par l'arc F E,

qui eſt moindre que l'arc A E qui a nonante degrez.

Theorême ſecond.

Une ligne perpendiculaire ſur une autre fait avec elle deux angles droits ; & ſi elle fait deux angles droits, elle eſt perpendiculaire.



1° B A eſt perpendiculaire ſur A milieu de CD, d'où comme centre ayant décrit le cercle CBD, par la notion de la perpendiculaire, les lignes ou cordes BC & BD ſont égales, ainſi les arcs qu'elles ſoûtiennent ſont égaux ; & partant puiſque CBD eſt la moitié de la circonference, CD étant le diametre du cercle, les arcs B C & B D en ſeront le quart ; donc les angles B A C & B A D ayant pour meſure chacun le quart de cercle, ils ſont droits, par la quatriéme definition.

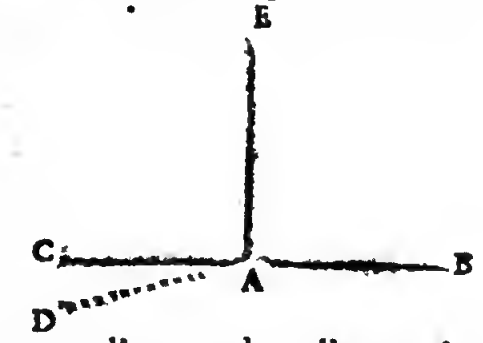
2° Il eſt facile de démontrer la ſeconde partie, car ſi les deux angles CAB & D A B ſont droits, les arcs B C & B D ſont égaux, & B étant ainſi en égale diſtance de C & de D, la ligne A B eſt perpendiculaire.

Corollaire.

Donc ſi deux lignes ſe joignent, & qu'elles faſſent deux angles droits avec une ligne élevée ſur le point où elles ſe

joignent, elles ne font qu'une même ligne.

Si l'on n'en demeure pas d'accord, je ſuppoſe que deux differentes lignes A B & A D ſe joignent en A, qui font deux angles droits avec A E, quoy qu'elles ne ſoient pas la même ligne. Ie prolonge B A en C; puiſque B A E eſt droit, par le preſent Theorême la ligne E A eſt perpendiculaire ſur B A ou B C, & par conſequent l'angle E A C eſt droit, par le même Theorême, donc il ſera égal à l'angle E A D, qui eſt ſuppoſé droit. Or cela ne peut pas être. Donc on ne peut pas dire que deux lignes qui ſe joignent & qui font deux angles droits avec une ligne élevée ſur le point où elles ſe joignent, ſoient deux differentes lignes,

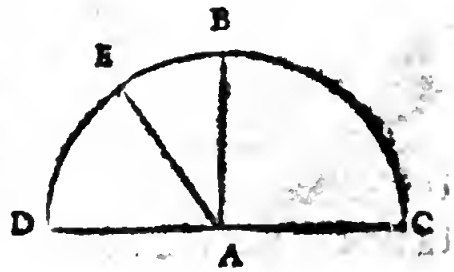


Theorême troiſiéme.

La ligne E A oblique ſur C D fait avec elle d'un côté un angle obtus, & de l'autre un aigu, qui tous deux enſemble valent deux droits,

Soit A B une perpendiculaire ſur A milieu de la ligne C D; donc l'arc C B ſera égal à B D, & par conſequent chacun eſt de nonante degrez; & puiſque E A eſt oblique, & qu'ainſi elle n'eſt pas perpendiculaire, les deux arcs C E & E D ſont inégaux; l'arc C E eſt plus grand que B C; donc l'angle C A E eſt obtus, par la definition 5e.

L'arc E D eſt plus petit que B D qui eſt de nonante degrez; donc l'angle E A D par la 6e defi-



nition eſt aigu. Ces deux angles C A E & E A D ont pour meſure les arcs C E & E D, qui ſont enſemble la demie circonference, c'eſt à dire, deux quarts de cercle. Ils valent donc deux angles droits, puiſque leur meſure égale deux fois nonante degrez, meſure de deux angles droits.

Septiéme definition

L'angle aigu qui vaut avec l'obtus deux droits, s'appelle le complement de l'angle obtus au demy cercle.

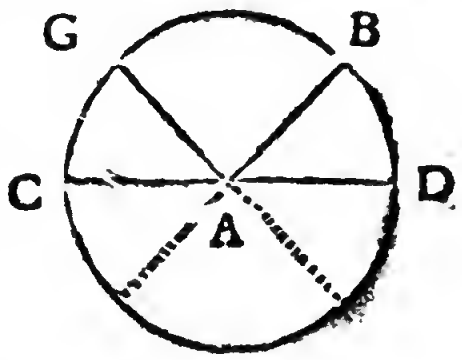
Scholie.

Ainſi D A E eſt le complement de C A E.

Theoréme quatriéme.

Tous les angles que deux ou pluſieurs lignes font avec une ligne ſur laquelle elles tombent, ſont égaux à deux angles droits, & ont par conſequent pour meſure la demie circonference.

Qu'on conçoive tant de lignes que l'on voudra, qui tombent ſur C D au point A, de ce point cõme centre ayant décrit un cerle, la meſure de tous ces angles ſera la demie circonference C G B D, qui eſt la meſure de deux angles droits.



Corollaire.

Ainſi deux ou pluſieurs lignes ſe coupant en un point, tous les angles qu'elles font autour de ce point ſont égaux à quatre angles droits.

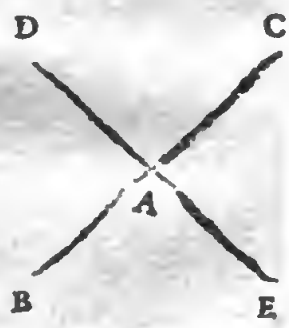
Car les angles que A G & A B ſont ſur C D valant deux droits, ſi l'on conçoit que ces lignes ſoient prolongées, tous les angles qu'elles feront de l'autre part ſeront auſſi égaux à deux angles droits : donc les angles qu'elles font autour du point A valent quatre angles droits.

Theorême cinquiéme.

Deux lignes en ſe coupant font les angles oppoſez au ſommet égaux.

Les deux lignes B C & D E ſe coupent au point A. Je dis que les angles DAC & BAE ſont égaux, comme auſſi D A B & C A E.

Par le Theorême troiſiéme *ſup.* DAB & BAE valent deux droits ; par le même Theorême D A B & D A C valent deux droits ; donc ôtant de ces deux valeurs égales l'angle commun DAB, les reſtes DAC & BAE ſeront égaux. Par le même raiſonnement on fait voir que D A B & C A E ſont égaux.



Huitiéme definition.

Sinus d'un arc, c'eſt la moitié de la corde du double de cet arc.

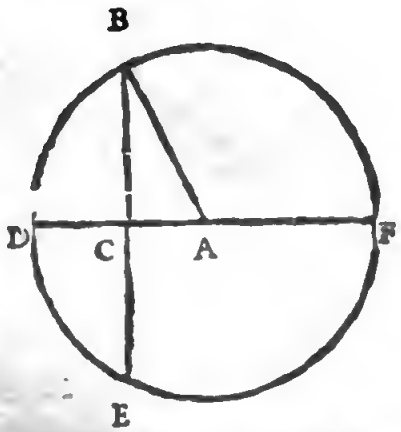
Scholie.

L'arc B DE eſt le double de l'arc B D, la ligne B C, moitié de B E

B E corde de B D E eſt ſinus tant de l'arc BD que de l'arc BF, ſon complément au demy cercle, ainſi les arcs DB & B F égaux enſemble au demy cercle ont un même ſinus, & ſont reciproquement complément l'un de l'autre au demy cercle.

Neuviéme definition.

Le ſinus d'un angle, c'eſt le ſinus de l'arc qui le meſure.



Scholie.

Ainſi B C qui eſt ſinus de l'arc B D meſure de l'angle BAD, eſt le ſinus de cet angle. Lors qu'un angle eſt obtus ſon ſinus eſt auſſi le ſinus de l'angle aigu, qui eſt ſon complément au demy cercle, ainſi BC eſt ſinus de l'angle obtus BAF auſſi-bien que de l'angle aigu BAC, c'eſt pourquoy dans la ſuite l'on ne conſidere que les ſinus des angles aigus.

Theorême ſixiéme.

Ayant décrit l'arc qui meſure un angle, & du point où il coupe un des côtez mené une perpendiculaire ſur l'autre, cette perpendiculaire ſera le ſinus de cet angle.

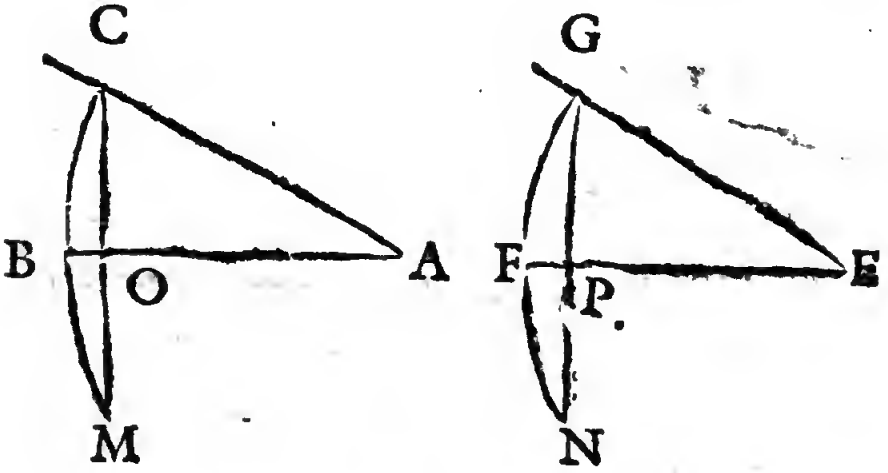
Soit l'angle B A D, du ſommet duquel, & de l'intervalle qu'on a voulu, on ait fait l'arc BD. Si de B on abaiſſe la perpendiculaire B C ſur A D, je dis que B C ſera le ſinus de B A D, car par le Theor. 3e l. 1, § 5 B C = C E, & par le Theor. 2, l. 1, § 5 BD = DE: donc par la defin. 8e BC eſt le ſinus de l'arc BD, & par la neuviéme de l'angle BAD

que meſure l'arc B D.

Theorême ſeptiéme.

Les angles égaux ont des ſinus égaux; & ſi les ſinus ſont égaux, les angles ſont égaux.

1° Les angles CAB & GEF ſont égaux. Ainſi de leur ſommet A & E & d'un intervalle égal, ayant fait les arcs CB, GF qui meſurent ces angles, ces arcs ſeront égaux. Je les continuëde ſorte que C B = B M & G F = F N : donc puiſque les



arcs égaux ont des cordes égales CM = G N; & par conſequent C O & G P les moitiés de ces cordes, ſont égales ; or ces moitiés ſont les ſinus des angles CAB & G E F, donc les ſinus de ces angles ſont égaux.

Si les ſinus CO & GP ſont égaux, CM = G N, & partant CBM = GFN: donc les

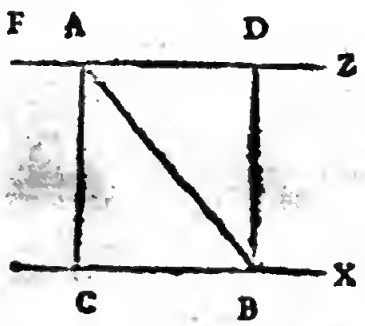
angles C A B & GEF étans meſurez par ces arcs égaux, ils ſont égaux.

Theorême huitiéme.

Les angles alternes que fait une ligne qui joint deux paralelles ſont égaux.

Z & X ſont deux paralelles, je dis que les angles D A B & A B C ſont égaux, & que XBA eſt auſſi égal à B A F.

Je mene entre les paralelles Z &X,les perpendiculaires AC & D B, qui ſont ainſi égales. Concevãt que de A & B comme centre & d'un même intervalle A B on a décrit les arcs qui



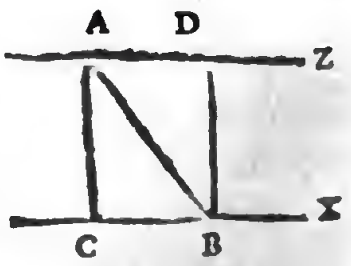
ſont les meſures des angles D A B & ABC, les lignes AC & BD par le Th.6e en ſeront les ſinus, qui étans égaux,par le Theor. 7e, les angles D A B & A B C ſeront égaux.

DAB & BAF valent deux droits, par le Theor. 3e *ſup.* A B C & X B A valent auſſi deux droits. De ces deux tous égaux ôtant des choſes égales, ſçavoir les angles D A B & ABC,les reſtes XBA & BAF ſeront égaux.

Theorême neuviéme.

Si une ligne joignant deux autres lignes fait les angles alternes égaux, ces deux lignes ſont paralelles.

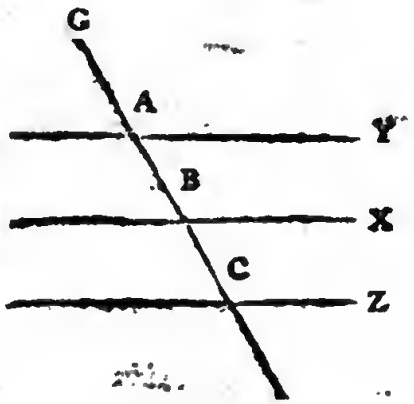
Si l'angle DAB eſt égal à l'angle ABC, concevant que de A & de B comme centre & d'un même intervalle A B on ait fait les arcs qui meſurent ces angles, ces arcs ſeront égaux, puiſque les angles le ſont, ayant donc abaiſſé de A ſur X & de B ſur Z des perpendiculaires, par le Theor. 6e, elles ſeront les ſinus de ces angles, & par le Theor. 7e elles ſeront égales. Partant Z & X ſelon la definition des lignes paralelles ſont paralelles.



Theorême dixiéme.

Une ligne coupant deux ou pluſieurs paralelles, tous les angles qu'elle fait avec elles ſont égaux.

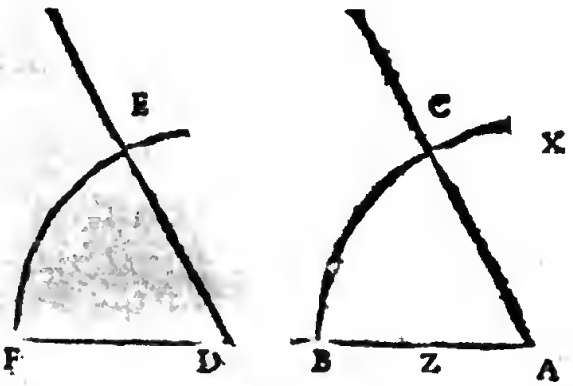
Par le Theor. 8e *ſup.* ZCB = CBE, par le Theor. 5e *ſup.* CBE = ABX : donc ZCB = XBA étant égaux àun troiſiéme: on démõtre de même que GAY = ABX.



Problême premier.

Sur le point A êlever une ligne, qui avec Z faſſe un angle égal à un autre angle donné.

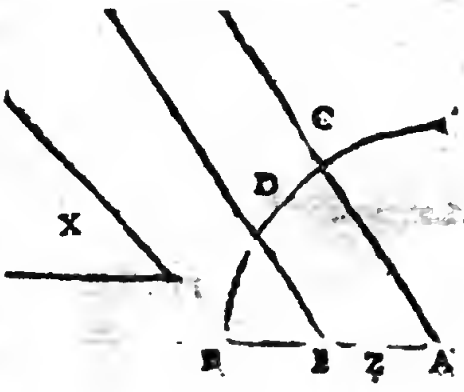
L'angle donné eſt E D F, de D comme centre je fais l'arc E F, aprés du point donné A comme centre, & de l'intervalle D E je fais le cercle X : dont je prends l'arc B C égal à l'arc E F, en ſuite menant de C au point A une ligne droite, l'angle C A B ſera celuy que l'on propoſoit de faire égal à E D F, car ils ont pour meſure des arcs égaux, ainſi ils ſont égaux.



Problême ſecond.

Par le point D mener une ligne droite ſur Z qui faſſe avec elle un angle égal à un angle donné.

Sur Z dans quelque point que ce ſoit pris à diſcretion, j'éleve une ligne telle que A C, qui par le problême precedãt faſſe l'angle C A B égal à l'angle donné X. ſi cette ligne paſſe par le point D, le Problême eſt achevé.

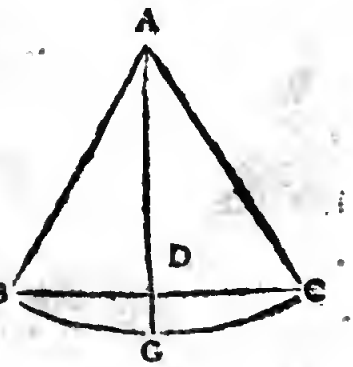


Si elle n'y paſſe pas, je mene par D une ligne paralelle à CA; par le Theorême 10e *ſup.* DEB eſt égal à CAB, & CAB eſt égal à l'angle X, par conſequent DEB eſt égal à l'angle propoſé X: ainſi j'ay ſatisfait au problême.

Problême troiſiéme.

Couper un angle en deux parties égales.

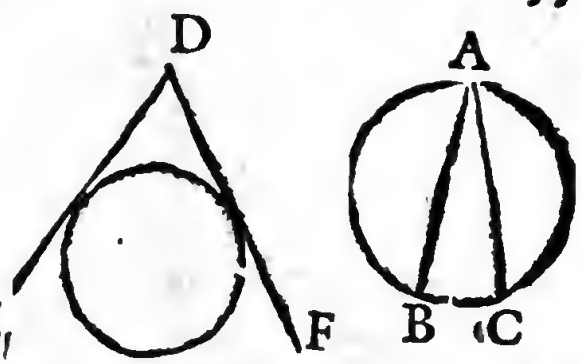
L'angle donné eſt B A C, ayant fait ſes deux côtez A B & A C égaux, il faut les joindre par la ligne B C, ſur laquelle, & du point A ayant mené une perpendiculaire A G. par le Coroll. du Prob. 2 § 4. l. 1. BD = DC, partant concevant que l'arc B G C eſt partie d'un cercle dont A eſt le centre, & AB & AC les rayons: ſelon la notion de la perpendiculaire, BG = GC, ce qui étant l'angle BAG eſt égal à GAC, ainſi BAC eſt coupé en deux parties égales.



Dixiéme definition.

L'angle B A C dont le ſommet A eſt

dans la circonference du cercle. eſt dit être inſcrit à ce cercle, & l'angle EDF, dõt les côtez touchent le cercle, eſt nommé circonſcrit.



Onziéme definition.

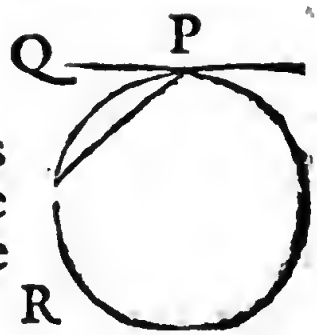
On appelle ſegment de cercle une portion de cercle lequel eſt coupé par une ligne droite. La plus petite portion s'appelle le petit ſegment.

Douziéme definition.

L'angle N M O dont le ſommet M, eſt le centre du cercle, & qui a pour ſes côtez les rayons de ce cercle, eſt nommé l'angle du centre.

Treziéme definition.

L'angle Q P R compris entre P Q, une tangente & la corde P R eſt nommée angle du ſegment.



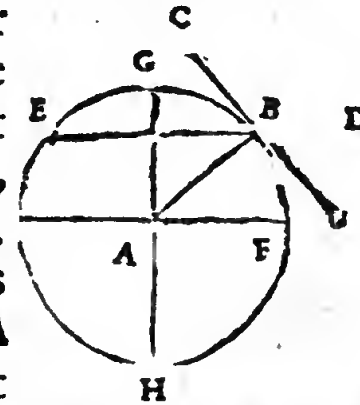
Quatorziéme definition.

L'angle T S V compris entre les deux cordes T S & V S, qui ſe joignent dans un point de la circonference, s'appelle angle dans le ſegment.

Theoréme onziéme.

L'angle C B E compris entre la tangente DC & la corde BE a pour meſure un arc égal à B G, moitié de l'arc dont BE eſt la corde.

Du point G je mene la ligne G H par le centre,& par le même centre je mene F A paralelle à B E,& du point d'attouchement B,une perpendiculaire ſur CD qui va au centre A par le Th. 8e §. 5 l. 1, partant par le Th. 2 *ſup.* ABC eſt droit: & puiſque B G = G E , donc par le 2e Theorême § 5, l. 1. GH eſt perpendiculaire ſur BE & partant ſur FA, qui eſt paralelle à B E ; par conſequent l'angle FAG eſt droit, ainſi il eſt égal à ABC. Par le Theor. 8e *ſup.* les alternes FAB & E B A ſont égaux; donc ôtant ces deux angles égaux, ſçavoir F A B de FAG qui eſt droit , & ABE de l'angle droit A B C, les reſtes BAG & CBE ſeront égaux. Or B A G a pour ſa meſure l'arc BG ; donc C B E qui luy eſt égal,a pour ſa meſure un arc égal à BG,moitié de B GE, ce qu'il faloit prouver.

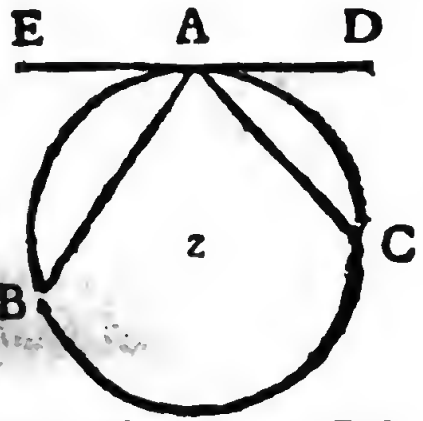


Theoréme douziéme.

L'angle B A C inſcrit dans le cercle Z

a pour ſa meſure la moitié de l'arc B C, ſur lequel il eſt appuyé.

Je mene par A la ligne E D qui touche le cercle Z: les trois angles EAB, BAC & CAD valent deux droits; ils ont donc pour leur meſure la demie circõference du cercle Z: Or par le Theor. precedant l'angle DAC a pour ſa meſure la moitié de l'arc AC & l'angle E A B la moitié de l'arc A B; donc la moitié de l'arc BC, qui reſte pour achever la demie circonference ſera la meſure de l'angle BAC; ce qu'il faloit démontrer.



Corollaire premier.

Tous les angles inſcrits dans un cercle appuyez ſur un même arc, ou ſur un même ſegment ſont égaux.

Car ils ont pour leur meſure la moitié de l'arc ſur lequel ils ſont appuyez, ainſi s'ils ſont appuyez ſur le même arc, ils ſont égaux.

Corollaire ſecond.

L'angle du centre CAD eſt double de l'angle inſcrit CBD, qui eſt appuyé ſur le même arc CD.

Car l'angle CAD, par la definit. 3. *ſup.* a pour ſa meſure l'arc CD, dont la moitié eſt la meſure de CBD,

Corollaire troiſiéme.

L'angle inſcrit dans le demy cercle, où dont le diametre du cercle eſt la baſe, eſt droit.

Car il eſt appuyé ſur la demie circonference, dont la moitié, qui eſt de nonante degrez, eſt la meſure de l'angle droit.

Corollaire quatriéme.

L'angle dans le grand ſegment eſt aigu.

Car il eſt appuyé ſur un arc moindre que la demie circonference, ainſi la moitié de cet arc, qui eſt ſa meſure, eſt moins de nonante degrez.

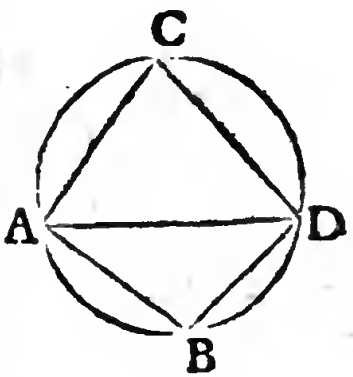
Corollaire cinquiéme.

L'angle dans le petit ſegment eſt obtus.

Car il eſt appuyé ſur un arc plus grand que la demie circonferẽce, dont la moitié, qui eſt ſa meſure eſt de plus de 90 degrez.

Corollaire ſixiéme.

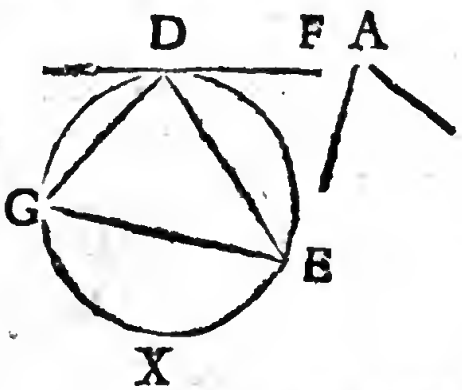
Les angles A B D & A C D inſcrits en deux ſegmens oppoſez ſont égaux à deux droits.



Car ils ont pour meſure la moitié des arcs A B D & A C D, & par conſequent la moitié de tôute la demie circonference qui vaut deux fois nonante degrez, ainſi ces deux angles ont pour meſure enſemble la valeur de deux angles droits.

Probléme troiſiéme.

Couper un ſegment dans le cercle X, qui ſoit capable de l'angle donné A.



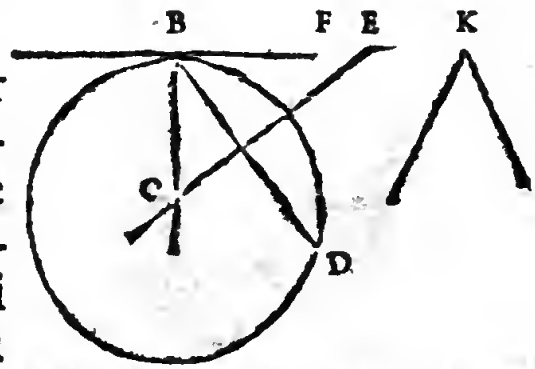
C'eſt à dire, que l'angle qui ſera appuyé ſur ce ſegment, ſoit égal à l'angle A.

Je mene D F qui touche le cercle X, & par le Probl. premier *ſup.* ſur D F je mene D E une ſeconde ligne qui faſſe avec D F un angle égal à A : tout angle inſcrit dans le cercle X qui ſera appuyé ſur D E a pour ſa meſure la moitié de l'arc E D, par le Theor. *ſup.* & ſon premier Corollaire : or la moitié de cét arc eſt la meſure de l'angle E D F égal à A par le Theor. IIe *ſup.* donc on a fait ce qui étoit propoſé : c'eſt à dire, que tout angle inſcrit dans le cercle X , dont la baſe ſera l'arc DE,quelque part que ſoit ſon ſommet dans la circonference du cercle,il ſera égal à A.

Probléme quatriéme.

Trouver le cercle dont le ſegment terminé par la ligne B D ſoit capable d'un angle égal à l'angle K.

Sur B D , par le Problême premier *ſup.* ſoit fait l'angle FBD égal à l'angle K : au point B ſoit élevée B C perpendiculaire ſur BF, & ſur le milieu de B D une autre perpendiculaire EC, qui coupera B C au point C, d'où ayant décrit un cercle de l'intervalle B C , on aura le cercle que l'on cherchoit, ce qu'il faut prouver.

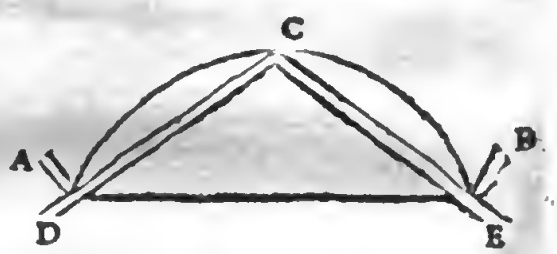


B F par la definition des tangentes touche ce cercle, ainſi par le Theor. 11e *ſup.* l'angle FBD a pour ſa meſure un arc égal à la moitié de l'arc B D : tous les angles inſcrits dans ce cercle, & appuyez ſur B D ſont égaux par le Theor. 12 *ſup.* & ſon premier Corollaire, & ont pour leur meſure la moitié de l'arc BD ; ils ſont donc égaux à l'angle F B D, & partant à l'angle K à qui on a fait égal FBD.

Scholie.

De ce que l'on a prouvé cy-deſſus Corollaire premier du Theor. 12 *ſup.* que tous les angles appuyez ſur le même arc ſont égaux ; l'on apprend le moyen de faire une portion de cercle de tant de degrez que l'on voudra, ſans compas, ou ſans avoir le centre, ce qui eſt d'une grande utilité.

AB eſt la corde d'un arc propoſé, ou de la portion d'un cercle, laquelle l'on veut tracer. On veut que cet arc ſoit de dix degrez, ainſi l'angle inſcrit dans cet arc, aura pour ſa meſure la moitié de 360 degrez moins dix, c'eſt à dire, que cet angle ſera de 175 degrez. Ie diſpoſe donc les deux regles droites CD & CE, de ſorte que l'angle DCE ſoit de 175 degrez, & ie les joints enſemble : je plante deux clous à l'extremité de la corde A & B, aprés quoy tournant le point C en ſorte que les deux regles CD & CE raſent toujours les clous A & B, ie décriray la ligne circulaire ACB, qui ſera l'arc que l'on chetchoit.



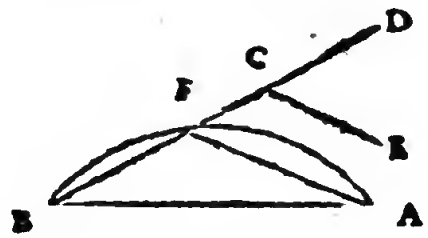
Par ce moyen on peut décrire la portion d'un cercle, quelque grandeur que puiſſe avoir ce cercle. Cette operation eſt mechanique, en voicy une qui eſt Geometrique.

Problême cinquiéme.

La corde AB d'un ſegment de cercle étant donnée avec l'angle dans ce ſegment, trouve les points par où paſſe

l'arc dont AB eſt la corde, ſans connoître ny chercher le centre du cercle, dont cet arc eſt partie.

Je mene la ligne BD, aprés dans un point de cette ligne pris à diſcretion je fais l'angle ECF égal à l'angle donné, en ſuite je mene par A une ligne paralelle à EC, ainſi l'angle AFB eſt égal à ECF, Theor. 10 *ſup.* §.1. & à l'angle dõné, partant l'arc propoſé, ſelon ce qui vient d'être démõntré, paſſe par F: par une ſemblable operation je trouve les autres points par où paſſe cet arc, ſans qu'il ſoit neceſſaire, de chercher le cẽtre du cercle dont cet arc eſt une partie.



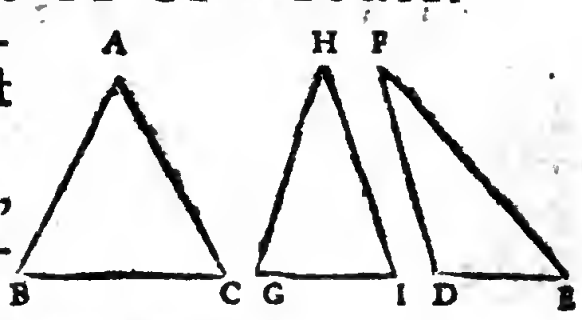
SECTION II.

Des ſurfaces compriſes entre trois lignes, ce qui s'appelle triangle.

Premiere definition.

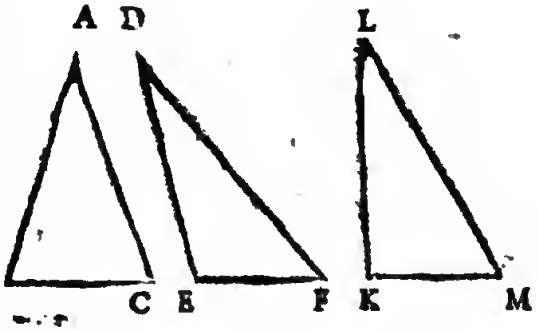
UN triangle, dont les trois côtez ſont égaux, eſt nommé Equilateral. Si ces trois côtez ſont inégaux, Scalene, & ſi deux ſeulement ſont égaux, Iſocele.

Ainſi le triãgle A B C eſt Equilateral DEF Scalene, & GHI Iſoſcele.



Seconde definition

Un triangle dont tous les angles ſont aigus, s'appelle Oxigone, ſi l'un d'eux eſt Obtus Amblygone, ſi l'un eſt droit rectãgle.



Le triangle A B C eſt oxigone, D E F amblygone & LKM rectangle.

Theorême premier.

Dans un triangle deux de ſes côtez, quels qu'ils ſoient, ſont plus grands que le troiſiéme.

A B + B C ſont plus grands que A C: cela a été dit. Entre deux points A & C on ne peut concevoir aucune ligne plus courte que la droite A C.

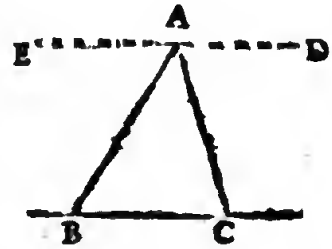
Corollaire.

Ainſi on ne peut faire un triangle de trois lignes données, ſi deux de ces lignes ne ſont plus grandes que la 3e.

Theorême ſecond.

Les trois angles d'un triangle ſont égaux à deux droits.

Soit un triangle A B C, pour prouver le Theorême propoſé je mene par le ſommet d'un des angles la ligne DE paralelle à la baſe BC, par le Theor. 4, § 1 *ſup.* les trois angles EAB, BAC, CAD ſont égaux à deux droits : or par le Theor. 8, § 1 *ſup.* l'angle ABC eſt égal à EAB, & A C B à l'angle D A C: donc les trois angles de ABC ſont égaux à deux angles droits, ce qu'il faloit démontrer.



Corollaire premier.

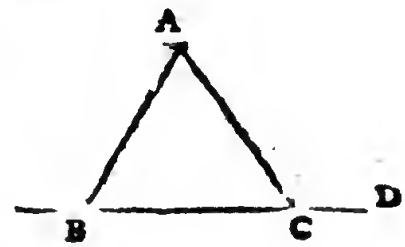
Donc connoiſſant les deux angles d'un triangle on connoit le troiſiéme.

Car les trois valant cent quatre vingts, ſi deux valent cent ſoixante, le troiſiéme vaudra vingt.

Corollaire ſecond.

L'angle exterieur A C D eſt égal aux deux interieurs oppoſez.

Par le Theor. 3, § *ſup.* A C B + A C D valent deux droits, Or A C B plus les deux angles interieurs C A B & C B A valent auſſi deux droits, comme nous venons de le démontrer, donc les deux interieurs ſont égaux à l'exterieur A C D.



Corollaire troiſiéme.

Les trois angles d'un triangle peuvent être aigus.

Car on peut partaget 180 degrez valeur des trois angles d'un triangle en trois parties, dont chacune ſera moindre que la valeur d'un angle obtus, ou d'un angle droit, & qui toutes trois ne feront que 180, valeur de deux angles droits.

Corollaire quatriéme

Dans un triangle il ne peut y avoir plus d'un angle droit, ny plus d'un obtus.

Si deux des angles étoient droits, les trois enſemble vaudroient plus de deux droits. Si deux étoient obtus, l'angle obtus étant plus grand que le droit, les trois enſemble vaudroient davantage que deux droits; ce qui eſt contre le Th. precedant.

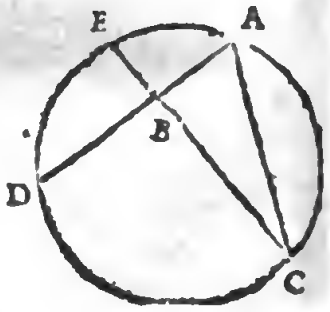
Corollaire cinquiéme.

Si dans deux triangles deux angles de l'un ſont égaux à deux angles de l'autre, ils ſont equiangles, c'eſt à dire, que le troiſiéme angle de l'un eſt égal au troiſiéme angle de l'autre.

Car les trois angles de chacun de ces triangles ſont égaux à deux droits; ainſi puiſque de deux tous égaux ôtant des parties égales, les reſtes ſont égaux, il faut qu'aptés avoir ôté de chaque triangle les deux premiers de l'un égaux aux deux premiers de l'autre, le troiſiéme angle de l'un qui reſte, ſoit égal au troiſiéme angle de l'autre.

Corollaire ſixiéme.

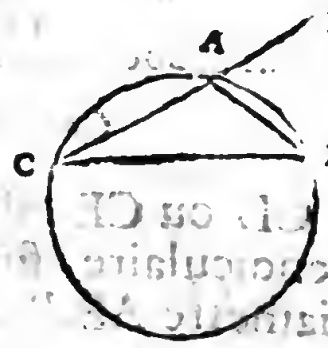
L'angle CBD dont le ſommet B eſt au dedans du cercle & ailleurs qu'au centre, a pour ſa meſure la moitié de l'arc CD, plus la moitié de l'arc AE.



Car l'angle CBD eſt égal aux deux interieurs CAD & ACE. par le Cotol. 2 *ſup.* Ou par le Theor. 12, §. 1 *ſup.* la moitié de CD eſt la meſure de CAD, & la moitié de AE la meſure de ACE: donc l'angle CBD equivalant à CAD, & à ACE, a pour ſa meſure la moitié de CD, plus la moitié de AE.

Corollaire ſeptiéme.

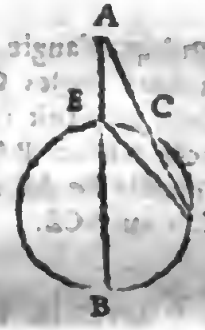
L'angle DAB, dont le ſommet eſt dans la circonference, fait par une corde & la ligne CD qui coupe le cercle, a pour ſa meſure la moitié de l'arc AB, plus la moitié de l'arc AC.



Car l'angle exterieur DAB par le Coroll. 2 *ſup.* eſt égal aux deux interieurs ACB & ABC, qui ont pour meſure la moitié des arcs AB & AC par le Theor. 12 § 1. *ſup.*

Corollaire huitiéme

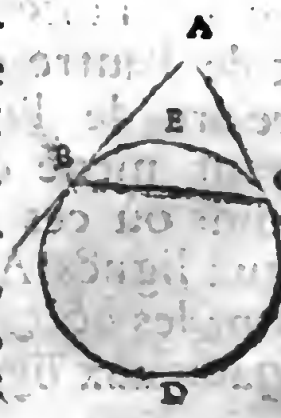
L'angle BAD qui eſt hors le cercle entre deux lignes ſecantes AB & AD, a pour ſa meſure la moitié de BD, moins la moitié de CE.



Car l'angle exterieur BED, par le Coroll. 2. *ſup.* eſt égal aux deux interieurs EDA & BAD : ainſi BED moins l'angle EDA ; qui a pour meſure la moitié de EC, par le Theor. 12, § 3 *ſup.* eſt égal à BAD ; partant la meſure de cet angle BAD eſt la moitié de l'arc BD moins la moitié de l'arc EC.

Corollaire neuviéme.

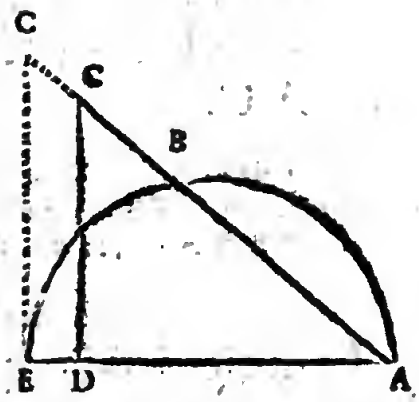
Les lignes AB, AC touchent le cercle. L'angle qu'elles comprênent BAC a pour ſa meſure la moitié de BDC, moins la moitié de BEC : c'eſt à dire, la moitié de l'arc concave, moins la moitié de l'arc convexe.



L'angle ABC a pour ſa meſure, par le Theor. 11 §. 1. *ſup.* la moitié de l'arc BEC; les deux autres angles ont donc pour meſure la moitié de l'arc B D C, puiſque tous trois enſemble ont la moitié du cercle : Or BCA a auſſi pour meſure la moitié de BEC, par le Theor. 11, § 1. *ſup.* donc BAC a pour meſure la moitié de BDC, moins la moitié de BEC.

Corollaire dixiéme.

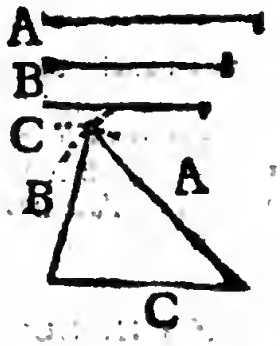
CD ou CE eſt perpendiculaire ſur le diametre AE, l'angle ACD, ou ACE a pour ſa meſure la moitié de l'arc AB.



Puiſque l'angle ADC eſt droit, les deux angles CAD & ACD valent un droit : ainſi ils ont pour meſure la moitié du demy cercle ABE: or BAD a pour meſure la moitié de l'arc BE; donc la moitié de AB reſte du demy cercle, eſt la meſure de l'angle ACD ou ACE.

Probléme premier.

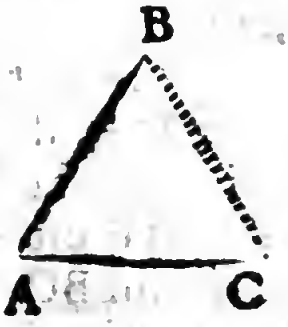
Faire le triangle dont on a les trois côtez A, B, C.



D'une des extremitez de ces trois lignes, par exemple de C, je faits un arc de l'intervalle de A; & de l'autre extremité je faits un autre arc de l'intervalle de B, en ſuite ayant mené des extremitez de C au point où ces deux arcs ſe coupent, les deux lignes A & B, le triangle ſera fait, dont les côtez par la conſtruction ſeront égaux aux lignes données.

Problême ſecond.

Faire le triangle dont on a un angle & la grandeur des côtez AB & AC, qui le comprennent.

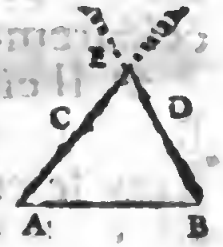


Ayant mis ces deux côtez A B & AC, en ſorte qu'ils faſſent l'angle BAC égal à l'angle donné, ſelon que l'enſeigne le Probl. 1er § 1er *ſup.* la ligne BC qui en joindra les extremitez achevera le triangle.

Problême troiſiéme.

Faire le triangle dont on a un côté, & les deux angles ſur ce côté.

Tirant deux lignes ſur les extremitez du côté AB qui faſſent, par le Probl. premier § premier *ſup.* les angles donnez CAB & DBA, je dis qu'étant prolongées, elles acheveront le triangle ABE, qui eſt celuy qu'on cherchoit, comme il eſt evidant.

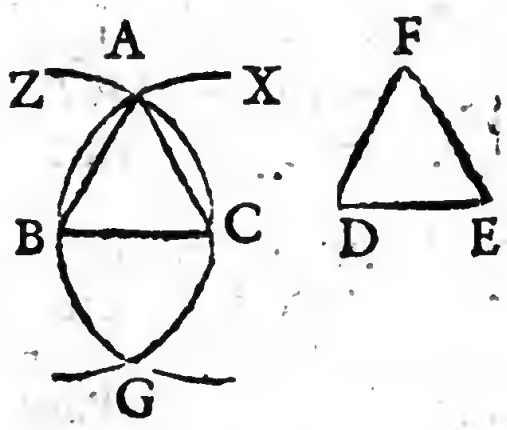


Theorême troiſiéme.

Deux triangles dont les côtez ſont égaux, ſont equiangles.

Les triangles A B C & DEF ont leurs côtez égaux. Je dis qu'ils ſont equiangles, ou, ce qui eſt la même choſe, qu'é-

tans poſez l'un ſur l'autre ils conviennent.



1° BC étant égal à D E, il eſt clair que la ligne D E eſtant poſée ſur BC, elles conviendrõt enſemble. Si on dit que D F ne conviendra pas avec AB, ny EF avec AC. Je démontre le contraire. De B comme centre & de l'intervalle AB ou DF lignes égales, je décris le cercle Z ; & de C de l'intervalle AC ou E F, qui ſont égales, le cercle X ; ces deux cercles ſe coupent neceſſairement au point A.

2° Il eſt evident que D eſtant poſé ſur B, le point F ſe trouvera neceſſairement dans le cercle Z, & que E eſtant poſé ſur C, le point F ſe trouvera dans le cercle X : le point F ſe trouvera donc dans Z & dans X, partant dans le point A où ces deux cercles ſe coupent, ainſi ces deux triangles poſez l'un ſur l'autre conviendront: ce qu'il faloit démontrer.

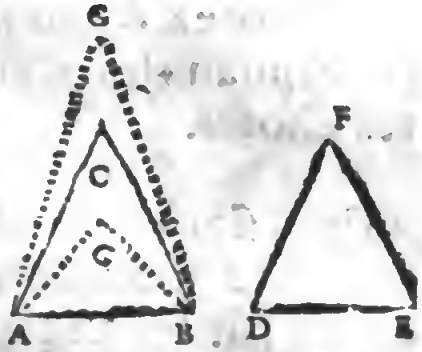
Scholie.

On pourroit dire que ces deux cercles Z & X ſe coupent ailleurs qu'en A : il eſt vray ; mais par ce qui a eſté démontré, ce ne peut eſtre qu'en deux points, & ce ſecond point eſt neceſſairement au deſſous de BC, ſçavoir au point G, comme il eſt evident. ainſi s'ils ſe coupoient au deſſus de BC en un autre point qu'en A, ils ſe couperoient en trois, ce qui ne peut eſtre.

Theorême quatriéme.

Deux triangles equiangles qui ont un côté égal, ſont entierement égaux.

ABC & DEF ſont equiangles, & AB = DE ; je dis qu'étant poſez l'un ſur l'autre ils conviendront, & qu'ainſi ils ſont en tout égaux.

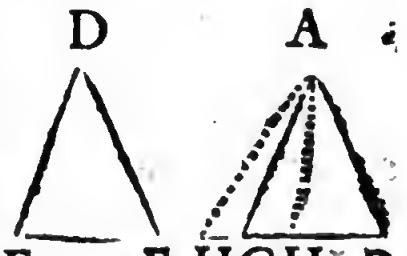


DE conviendra avec AB, ſi DF ne cõvient pas avec AC, mais avec AG : comme les angles FDE & CAB ſont égaux, il s'enſuivra que l'angle CAB = GAB qui ſera le même que FDE ; ce qui eſtant abſurde, & ne pouvant pas être, il faut reconnoître que DF conviendra avec AC, & par la même raiſon FE avec BC, ainſi le point F avec C, & par conſequent ces deux triangles ſont en tout égaux.

Theoréme cinquiéme.

Deux triangles qui ont un angle égal, & les deux cõtez qui comprennent cet angle, égaux, ſont tout égaux.

L'angle BAC = EDF & AB = DE & AC = DF, je dis que ces deux triangles conviendrõt étant poſez l'un ſur l'autre : car DE conviendra avec AB, ſi DF ne convenoit pas



avec AC, mais avec A H, l'angle BAC ſeroit égal à l'angle B A H, ce qui ne peut être. Ainſi D F convient avec AC, le point F avec C, par conſequent BC = E F, ainſi ces deux triangles qui ont leurs côtez égaux ſont par le Theor. 3e *ſup.* equiangles, c'eſt à dire, égaux en toutes choſes.

Troiſiéme definition.

Une figure rectiligne eſt dite inſcrite dans une autre dont elle touche tous les côtez par ſes angles ; & au contraire elle eſt dite circonſcrite à une figure lors que tous ſes cotez en touchent tous les angles.

Quatriéme definition.

Une figure rectiligne eſt dite inſcrite dans un cercle lors que tous ſes angles touchent la circonference du cercle, & au contraire elle eſt dite circonſcrite à un cercle, lors que tous ſes côtez touchent la circonference du cercle.

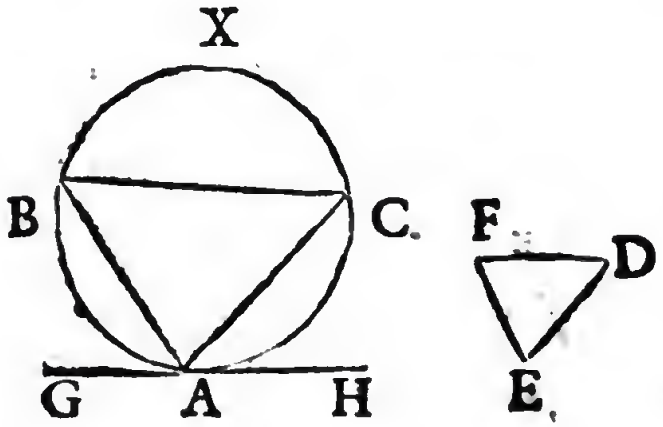
Et pareillement le cercle eſt inſcrit ou circõſcrit à une figure, lors que ſa circonference touche les côtez ou les angles de la figure.

Problême quatriéme.

Dans le cercle X inſcrire un triangle equiangle au triangle donné D E F.

Je tire la tangente GH, je fais l'angle GAB égal à FDE, & CAH égal à DFE,

j'acheve le triangle ABC en tirant la ligne B C.



e

Puiſque l'angle BAG, dont la meſur eſt la moitié de l'arc BA, par le Th. 11e, § 1 *ſup.* qui eſt auſſi la meſure de l'angle BCA, eſt égal à FDE, donc BCA = FDE.

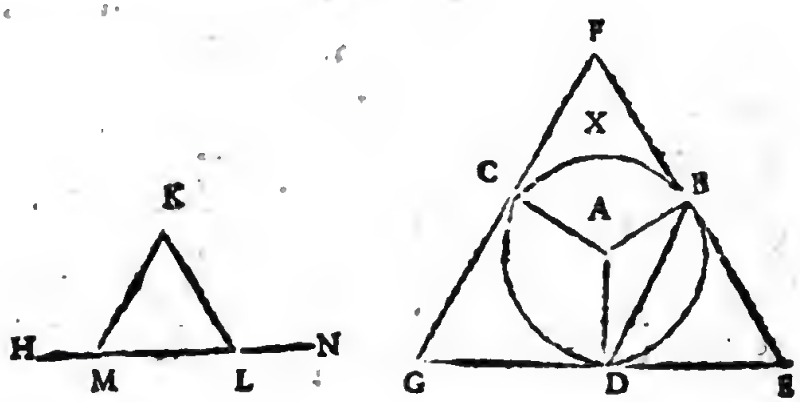
Par la même raiſon CAH fait égal à DFE, ayant pour ſa meſure la moitié de l'arc AC, meſure de C B A : il faut que CBA & DFE ſoient égaux: ainſi ces deux triangles A B C & E F D ayant deux angles égaux, ils ſont entierement equiangles, par le Coroll. 5 du Theor. 2. *ſup.*

Problême cinquiéme.

A l'entour du cercle X décrire un triangle equiangle au triangle KLM, ou circonſcrire au cercle X un triangle equiangle au triangle KLM.

Ayant tiré le rayon AD je faits d'une part l'angle BAD = NLK & de l'autre DAC = KMH ; aprés ayant mené par les

trois points B, D, C, les tangentes EF, FG, GE : je dis que le triangle EFG ſera equiangle à L K M.



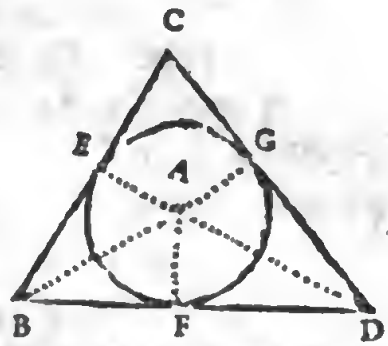
Les ſix angles des deux triangles BAD & BED valent quatre angles droits; AB & A D étant perpendiculaires EBD + ABD vaut un droit, EDB + B D A vaut encor un droit. Donc BED + BAD vaut deux droits. Or par la conſtruction BAD = *K*LN, cet angle *K* L N + *K*LM vaut deux droits. Donc BED = KLM : par la même voye on démontre que DGC = KML, & par conſequent que E F G = L*K*M, & qu'ainſi les triangles E F G & L*K*M ſont equiangles.

Problême ſixieme.

Dans le triangle BDC décrire un cercle.

Je coupe par le Problême 3 § 1. *ſup.* les angles CBD & CDB en deux parties égales par les lignes D A & B A : & du point A où ces deux lignes ſe coupent,

je mene les perpendiculaires A E, A F, A G ſur les côtez du triangle ; en ſuite de A & de l'intervalle de l'une de ces lignes je décris le cercle X, qui ſe trouvera inſcrit dans le triangle BCD : pour le prouver il faut faire voir que les trois lignes AE : AF, AG ſont égales.



Les deux triangles AEB & AFB ſont rectangles par la conſtruction, puiſque A E & A F ont été faites perpendiculaires. Les angles EBA & ABF ſont égaux par l'hipotheſe : ainſi ces deux triangles ayant deux angles égaux ſont equiangles. Ils ont le côté AB commun. Donc par le Theorême 4 *ſup.* AE = AF : par la même voye on démontrera que AG eſt égal à AF & à AE: ce qu'il faloit prouver.

Probléme ſeptiéme.

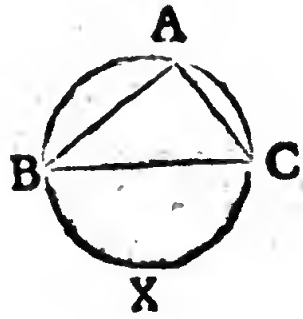
A l'entour du triangle A B C décrire un cercle.

Il n'eſt icy queſtion que de décrire un cercle par les trois points A, B, C, ainſi ce Probléme eſt le même que le Problême 1er § 5. l. 1.

Theoréme ſixiéme.

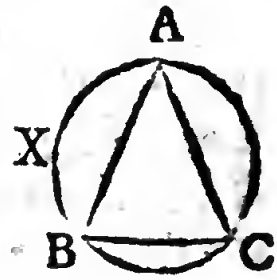
Le triangle ſcalene A B C a ſes trois angles inégaux.

Ayant décrit le cercle X à l'entour de ce triangle, puiſque les trois côtez AB, AC, BC ſont inégaux, les trois arcs dont ils ſont les cordes ſont inégaux. Donc les trois angles du triangle ABC, que la moitié de ces arcs meſure par le Th. 12e §. 1. *ſup.* ſont inégaux.



Theoréme ſeptiéme.

Dans le triangle Iſoſcele ABC les angles ſur la baſe ſont égaux; & ſi les angles ſur la baſe ſont égaux, le triangle eſt Iſoſcele.



Ayant décrit le cercle X à l'entour de ce triangle, puiſque AB= AC; les arcs que ces côtez ſoûtiennent ſont égaux. Or par le Th. 12 § 1 *ſup.* la moitié de ces arcs égaux eſt la meſure des angles ABC & ACB; donc ces angles ſont égaux.

L'autre partie de cette propoſition eſt facile. Car ſi les deux angles ABC& ACB ſont égaux, les arcs AB & AC, ou leurs cordes ſont êgales; ainſi le triangle ABC eſt Iſoſcele.

Corollaire premier.

Aucun des angles de la baſe d'un Iſoſ-

cele ne peut être droit ny obtus.

Car ſi l'un étoit droit, l'autre le ſeroit auſſi : ainſi les trois angles de ce triangle vaudroient plus que deux droits, ce qui ne peut être. Et ſi l'un étoit obtus l'autre le ſeroit, ainſi deux ſeuls angles de ce triangle vaudroient plus que deux angles droits, ce qui eſt encore plus impoſſible.

Corollaire ſecond.

Si deux triangles Iſoſceles ont un angle égal, ils les ont tous.

Car 1. Si cet angle égal eſt ſur la baſe, ils auront le ſecond angle de la baſe égal, partant le troiſiéme, par le Coroll. 5. Theor. 2. *ſup.*

2. Si c'eſt l'angle du ſommet, la valeur des deux angles ſur la baſe de chaque triangle ſera la même, & puiſque ces angles ſur la baſe ſont égaux, par le Theor. 7 *ſup.* chacun ſera la moitié de cette même ſomme, ainſi ils ſeront égaux.

Theoréme huitiéme.

Les trois angles d'un equilateral ſont égaux.

Ayant décrit un cercle à l'entour du triangle equilateral, les arcs dont les côtez de ce triangle ſont les cordes, ſont par conſequent égaux, & leurs moitiés égales. Or par le Theor. 12, § 1. *ſup.* ces moitiés ſont la meſure des angles du triangle. Donc tous ces angles ſont égaux.

Corollaire.

Ainſi chaque angle d'un equilateral eſt aigu, & toujours de 60 degrez.

Car ſi l'un étoit obtus ou droit, tous trois le ſeroient, ainſi ils vaudroient plus que deux angles droits, ce qui ne peut être. Chacun eſt neceſſairement la troiſiéme partie de deux angles droits, c'eſt à dire de 60 degrez, qui eſt le tiers de 180, valeur de deux angles droits, auſquels ſont égaux les trois angles de tout triangle.

Theorème neuviéme.

Dans un triangle le plus grand côté ſoûtient le plus grand angle, & le plus grand angle eſt ſoûtenu par le plus grand côté.

Ayant décrit un cercle à l'entour d'un triangle, le plus grand côté de ce triangle ſoûtient le plus grand arc. Or par le Theor. 12e § 1 *ſup.* la moitié de cet arc meſure l'angle oppoſé à ce plus grand côté; donc cet angle qui eſt meſuré par la moitié du plus grand arc, eſt le plus grand.

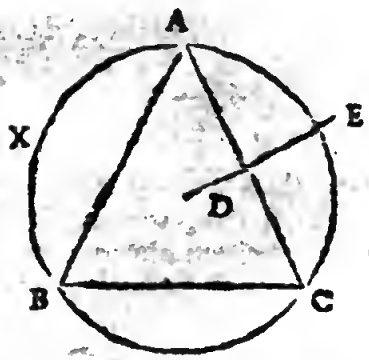
Dans un triangle inſcrit dans un cercle le plus grãd angle eſt meſuré par la moitié du plus grand arc. Or ce plus grand arc a la plus grande corde, ainſi le côté oppoſé à cet angle eſt le plus grand.

Theoréme dixiéme.

Dans un triangle la moitié de chaque côté eſt le ſinus de l'angle oppoſé.

Le triangle A B C ſoit inſcrit dans le cercle X, il faut démontrer que A D, moitié de AC eſt le ſinus de l'angle ABC.

Par le Theor. 12, § 1 *ſup.* l'arc A E moitié de l'arc A C eſt la meſure de l'ãgle ABC, ainſi l'arc AC eſt double de l'arc qui eſt la meſure de l'ãgle ABC: donc AD moitié de la corde de l'arc AC eſt le ſinus de l'arc AE par la defin. 8, § 1 *ſup.* & par conſequent de l'angle ABC, par la definit. 9, § 1 *ſup.*



On démontre par la même voye que

la moitié de AB eſt le ſinus de ACB, & la moitié de BC celuy de BAC.

Scholie.

Donc le ſinus d'un angle eſt au côté oppoſé de cet angle, comme le ſinus d'un autre angle eſt au côté oppoſé de cet angle, ou, les ſinus des angles ſont entr'eux comme les côtez oppoſez, puiſque les moitiés ſont comme les touts.

SECTION III.

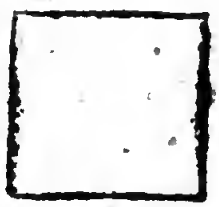
Des Surfaces compriſes entre pluſieurs lignes.

OU

Des figures de pluſieurs côtez.

Premiere definition.

LES figures quadrilataires, ou de quatre côtez reçoivent differens nõs. 1° Si les côtez oppoſez ſont paralelles, le quadrilataire eſt appellé d'un nom general, *Parallelogramme.* 2° Si les quatre côtez ſont égaux, & que les angles ſoient droits, c'eſt un *Quarré.*



A

Telle eſt la figure A.

3° Si les quatre côtez ſont égaux, & que les angles oppoſez ſoient auſſi égaux, mais non droits, c'eſt ce qu'on appelle *Rhombe.*

B

La figure B eſt un Rhombe.

4° Si tous les côtez ne ſont pas égaux, mais que tous les angles ſoient droits, cela s'appelle, *Quarré long, Oblong, Parallelogramme Rectangle*, ou ſimplement, *Rectangle.*

C

Telle eſt la figure C.

5° Si les côtez oppoſez ſont égaux, & les angles oppoſez auſſi égaux, mais non droits, cette figure eſt un *Rhomboïde.*

D

Telle eſt la figure D.

6° Toute figure quadrilataire, dont les côtez oppoſez ne ſont ny paralelles ny égaux, s'appelle un *Trapeze.*

E

Telle eſt la figure E.

Seconde definition.

Une figure eſt dite reguliere lors que tous ſes côtez & tous ſes angles ſont égaux.

Le quarré cy-deſſus marqué A eſt une figure reguliere.

Troiſiéme definition.

Une figure de pluſieurs côtez ſe nomme generalement *Polygone.* Elle prend le nom qui luy eſt propre du nombre de ſes côtez, ou du nombre de ſes angles que comprennent ſes côtez. Ainſi une figure de cinq angles eſt nommée, *Pentagone*; de ſix, *Exagone*, de ſept, *Eptagone*, ainſi de ſuite.

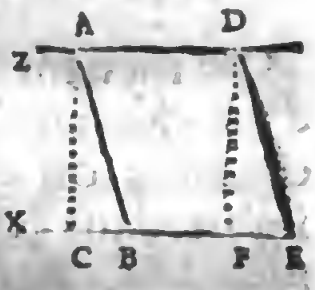
Quatrième definition.

Ayant mené deux lignes des extremitez d'un des côtez d'une figure reguliere inſcrite dans un cercle, ou circonſcrite, au centre de ce cercle, l'angle que ces lignes font, eſt appellé angle du centre.

Lemme premier.

Les lignes obliques A B & D E qui font les angles ABC & DEF égaux entre les paralelles Z & X ſont égales.

Ayant mené les perpendiculaires AC & DF entre les paralelles Z & X, elles ſeront égales. Les angles A C B & DFE ſont droits, & les angles ABC & DEF ſont égaux par l'hypotheſe. Les deux triangles A B C & D E F ſont donc equiangles, & AC étant égal à D F, ils ſeront tout égaux, par le Theor. 4 §. 2. *ſup.* & par conſequent AB eſt égal à DE.



Lemme ſecond.

Les lignes AB & DE qui font mêmes angles, ſont paralelles.

Par l'hypotheſe les angles ABC & DEF ſont égaux: par conſequent par le Th. 9, § 1, *ſup.* AB & DE doivent être paralelles.

Lemme troiſième.

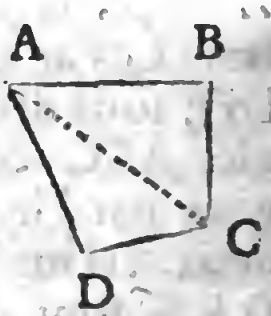
Deux lignes comme A D & B E qui joignent les deux lignes A B & D E éga-

les & paralelles, ſont égales.

Par le Theor. 6, § 4, l. 1. B C = EF, puiſque AB = DE & AC = DF, par conſequent CF = BE, mais CF eſt égal à AD, puiſque AC & DF ſont des perpendiculaires paralelles, entre leſquelles les perpendiculaires AD & CF ſont égales, ſelon la notion des paralelles. Donc BE = AD.

Theoréme premier.

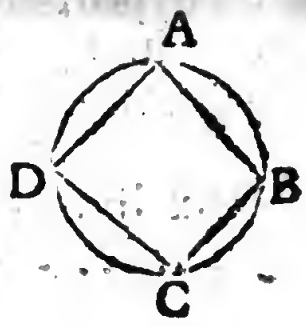
Les quatre angles d'un quadrilaraire ABCD ſont égaux à quatre droits.



Car menant la ligne AC d'un des angles à l'angle oppoſé, on partage cette figure dans les deux triangles ABC & ACD, de chacun deſquels les angles valent deux droits. Ainſi tous les angles de ABCD valent quatre droits.

Theoréme ſecond.

Si les angles oppoſez A B C & ADC ne valent pas deux droits, on ne peut pas inſcrire la figure A B C D dans un cercle.

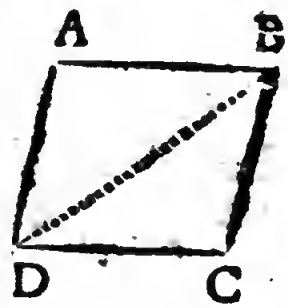


Si on ſuppoſe que ABCD eſt inſcrit dans un cercle, & que neanmoins les deux angles oppoſez A BC & CDA valent plus ou moins

que deux droits, il eſt facile de convaincre cette ſuppoſition de fauſſeté, car l'angle ABC a pour meſure la moitié de l'arc ABC,& l'angle ADC la moitié de l'arc ADC : ainſi ces deux angles ayant pour meſure la moitié du cercle, ils valent deux droits. Partant la ſuppoſition qu'on faiſoit, qu'ils valoient plus ou moins que deux droits, eſt fauſſe.

Theorême troiſiéme.

Si les côtez oppoſez du Quadrilataire ABCD ſont égaux, ils ſont paralelles.



Les triangles A B D & BCD ſont tout égaux, par le Theor. 3. §. 2. *ſup.* car par la ſuppoſition AB = CD & BC = AD: le côté BD eſt commun ; donc l'angle ABD = B D C, partant AB D eſt paralelle à D C, par le Theor.8, § 1, *ſup.* & par le méme Theor. BC ſera paralelle à A D, puiſque l'angle ADB eſt égal à DBC; ces deux triangles ADB & CBD étant en tout égaux, ainſi qu'il vient d'être dit : donc A B & D C ſont paralelles, comme auſſi AD & BC.

Theoréme quatriéme.

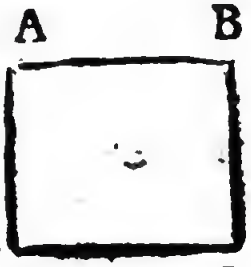
Si les deux côtez oppoſez d'un Quadrilataire ſont égaux & paralelles ; les deux autres ſont auſſi égaux & paralelles.

1° Ils ſont égaux par le Lemme 3 *ſup.*

2° Par le Th. 3 *ſup.* ils ſont paralelles.

Theorême cinquiéme.

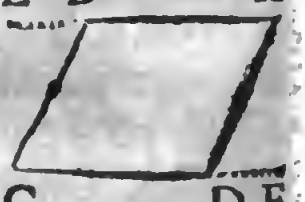
Si les quatre angles du Quadrilataire ABCD ſont droits, il eſt Parallelogramme.



Car AB & C D, par l'hipotheſe ſont perpendiculaires ſur AC, partant par le Lemme 2e § 4 l. 1, ils ſont paralelles. A C & B D ſont auſſi perpendiculaires ſur DC, par conſequent par la même raiſon ces lignes ſont paralelles.

Theorême ſixiéme.

Les angles oppoſez BCD & ADC du Parallelogramme ABCD ſont égaux, & ceux qui ſont proches comme BCD & ADC valent deux droits.



1° Par le Th. 10 §. 1. *ſup.* l'angle FDA = DCB: & par le Th. 8e § 1er *ſup.* DCB = CBE, partant puiſque deux angles égaux à un troiſiéme, ſont égaux, donc FDA = CBE : or F D A + A D C vaut deux angles droits par le Th. 3e §, 1. *ſup.* ABC + CBE eſt auſſi égal à deux droits par la même raiſon : donc ABC = ADC.

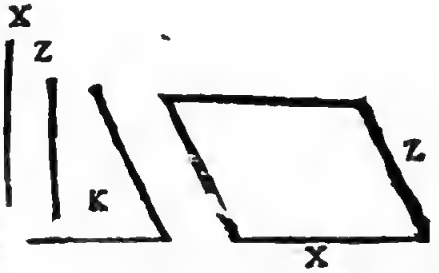
2° L'angle FDA = DCB : or FDA + ADC, comme nous venons de le dire,

vaut deux droits, donc A D C + B C D vaut deux droits, ce qu'il faloit démõtrer.

Problême premier.

Faire un Parallelogramme dont on a un angle & les deux côtez qui le comprennent.

Les côtez donnez ſont Z & X, l'angle donné K. Il faut joindre Z & X, de ſorte qu'ils faſſent un angle égal à K, ſelon qu'il a été enſeigné au 1. Probl. §1. l. 2. & en ſuite mener deux lignes paralelles à Z & à X.



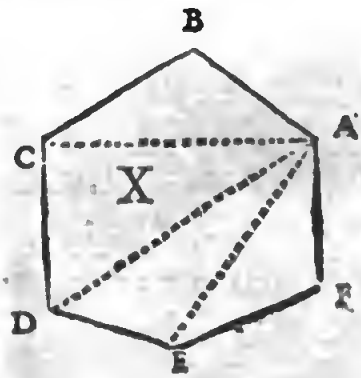
Corollaire.

Donc pour faire un quarré dont on a un côté, il n'eſt queſtion que de joindre deux lignes égales à celle qui eſt donnée, de ſorte qu'elles faſſent un angle droit.

Theorême ſeptiéme.

Toute figure, Polygone ou de pluſieurs côtez, ſe reduit en autant de triangles qu'elle a de côtez, moins deux.

Dans la figure Poligone X qui a ſix côtez, ayant mené de A à tous les autres angles des lignes droites, on fait autant de triãgles que le Polygone



X a de côtez, qui ſont les baſes de ces triangles, à la reſerve des deux côtez qui ſont proches de A, qui ſervent de côtez aux deux triangles les plus proches de A : ainſi on reduit une Polygone en autant de triangles qu'il a de côtez, moins deux. Le Polygone X qui a ſix côtez eſt reduit en quatre triangles.

Corollaire.

Donc tous les angles d'une figure de pluſieurs côtez, comme de X, ſont égaux à deux fois autant d'angles droits qu'elle a de côtez, moins deux, c'eſt à dire, que tous les angles de X qui a ſix côtez, ſont égaux à huit angles droits.

Car elle ſe reduit en autant de triangles qu'elle a de côtez, moins deux, c'eſt à dire, en quatre. Donc puiſque les angles de chaque triangle ſont égaux à deux droits, tous les angles de cette figure ſont égaux à huit droits. Ainſi tous les angles d'un Chiliogone, c'eſt à dire, d'une figure de mille côtez ſont égaux à 1996 angles droits, ce qu'on conçoit clairement, quoy qu'il ſoit impoſſible d'imaginer nettement un Chiliogone.

Problême ſecond.

Trouver quel doit être l'angle du centre de toute figure reguliere.

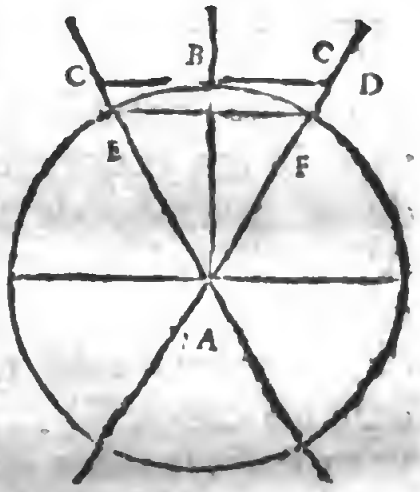
Tous les angles au tour d'un point, par le Coroll. du Theor. 4, § 1. *ſup.* ſont égaux à quatre angles droits, qui valent 360 degrez : par conſequent dans une figure reguliere tous les angles du centre étant égaux, ſi elle a dix côtez, l'angle du centre vaudra la dixiéme partie de 360 : diviſant donc 360 par dix, le

quotient de cette diviſion donnera la valeur de l'angle du centre d'une figure de dix côtez, ainſi de tout autre Polygone.

Scholie.

De là on apprend comment lors qu'on connoît l'angle du centre d'une figure reguliere, on la peut inſcrire dans un cercle.

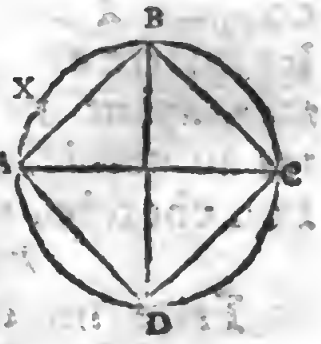
Il faut mener du centre deux rayons qui faſſent un angle tel que doit eſtre l'angle du centre de cette figure, car ſi c'eſt une figure de dix côtez faiſant un angle de 36 degrez, qui eſt la dixiéme partie de 360, la corde de cet angle ſera un des côtez de cette figure.



Si l'on veut circonſcrire un Polygone ou figure reguliere autour d'un cercle, il faut premierement l'inſcrire & en prolonger les rayons, aprés ayant diviſé par la moitié un des côtez de ce Polygone inſcrit, comme EF ayant mené le rayon AB par cette moitié, & mené par B une tangente entre AC & AD, on aura un des côtez du Polygone circonſcrit. En ſuite il faut faire tous les rayons prolongez de l'inſcrit égaux à AC & AD, par l'extremité deſquels ayant mené des lignes droites on aura la figure que l'on cherchoit, ainſi qu'il eſt evident ; mais l'on ne peut pas faire avec la ſeule regle & le compas l'angle du centre de toute figure reguliere, ſans exception, comme nous le ferons voir : cela ne ſe peut que mechaniquement en ſe ſervant d'un demy cercle, qui eſt diviſé par degrez, qu'on nomme un rapporteur.

Problême troiſiéme.

Inſcrire un quarré dans le cercle X.



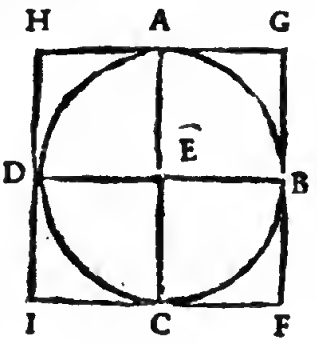
Aprés avoir mené le diametre AC, il faut diviſer les arcs A B C & A D C par la moitié, & par les quatre points, A, B, C, D mener des lignes droites.

1° Cette figure aura quatre côtez égaux, puiſque les lignes ſont les cordes d'arcs égaux.

2° Tous les angles de ABCD ſont droits, car ils ont pour meſure la moitié de la demie circonference, l'angle ABC s'appuyant ſur l'arc ADC, & BAD ſur l'arc BCD, &c.

Problême quatriéme.

Faire un cercle dans le quarré FGHI.



Ayant coupé par la moitié les quatre côtez de ce quarré, & mené AC & BD, ſi du point E où ils ſe coupent, & de l'intervalle AE on décrit un cercle, il ſe trouvera inſcrit dans ce quarré : car les quatre lignes AE, BE, CE, DE, ſont égales; ainſi le cercle paſſera par les points A, B, C, D.

Problême cinquiéme.

Circonſcrire un quarré à un cercle.

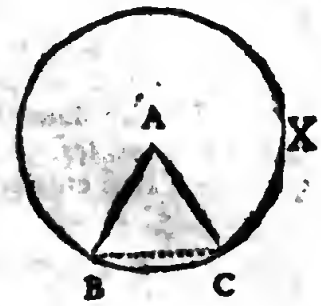
Il faut mener deux diamétres qui ſe coupent à angles droits; en ſuite par les quatre extremités de ces deux diamétres, ayant mené quatre lignes tangentes au cercle, elles feront le quarré que l'on cherche, comme il eſt evident.

Problême ſixiéme.

Faire un exagone, ou inſcrire un

exagone dans le cercle X.

Le rayon du cercle ſera un des côtez de l'exagone, ainſi le probléme eſt facile: mais il faut démontrer cette verité. Je ſuppoſe B C égal au rayon A B ou AC, ainſi le triangle ABC eſt equilateral, dont les angles eſtant égaux, l'angle BAC vaut le tiers de deux droits qui eſt 60 degrez ; ainſi l'arc BC eſt de 60 degrez qui ſont la ſixiéme partie de la circonference, qui en vaut 360, BC eſt donc côté, de l'exagone.

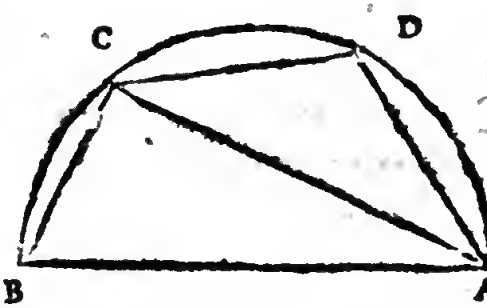


Scholie.

On ne peut point avec la regle & le compas diviſer geometriquement un cercle en tant de parties que l'on voudra, comme nous le venons de dire *ſup.* On ne peut pas, par exemple, diviſer un arc de cercle en trois, en cinq, en ſept parties &c, ſans employer des lignes d'un autre genre que celles dont nous avons parlé, comme nous le dirons dans la ſuite.

En cherchant les cordes du cercle par les voyes ordinaires, il faut prendre garde.

1. Que les cordes ne ſont pas entr'elles comme leurs arcs : car ſuppoſant l'arc A D égal à l'arc D C, la corde AC n'eſt pas double de la corde A D, comme l'arc ADC eſt double de l'arc AD. car AD+DC eſt plus grand que AC, ainſi A D, moitié de AD+DC, eſt plus grande que la moitié de A C.



2. Quand on connoit la corde d'un arc on peut trouver celle de la moitié de cet arc. Si AC eſt connu, en diviſant AC par la moitié par vne perpendiculaire, cette ligne diviſera l'arc ADC au point D en deux parties égales, ainſi la corde de l'arc AD moitié de l'arc ADC ſera connue.

3. Quand on connoit une corde d'un arc, on trouve celle du

double de cet arc. Si AD m'eſt connue, ie prens DC égal à AD, ainſi j'auray AC corde du double de l'arc AD.

4. Quand une corde comme BC eſt connüe, on a celle qui eſt la corde du complément au demy cercle de l'arc dont BC eſt la corde, c'eſt à dire, que la corde AC eſt connue, quand on connoit la corde BC.

Ainſi quand on a un poligone, on en trouve facilement deux autres, l'un qui ait deux fois plus de côtés, l'autre qui en ait deux fois moins, l'on donnera dans la ſuite le moyen de trouver geometriquement les côtez du pentagone, & du decagone, ce que l'on n'a pû enſeigner icy.

SECTION IIII.

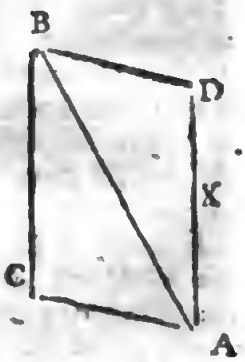
De la meſure de l'aire des ſurfaces.

AVERTISSEMENT.

Iuſques à preſent nous n'avons preſque parlé que des lignes qui bornent les ſurfaces, nous parlons icy de leur étenduë.

Theoréme premier.

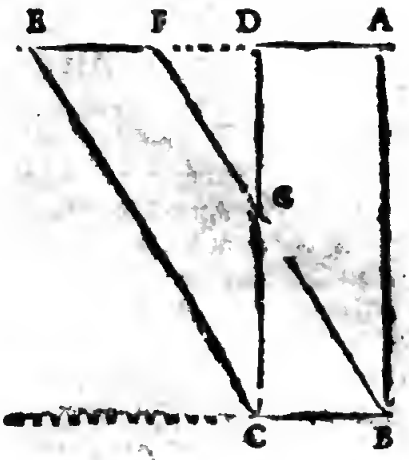
LA diagonale AB, qui eſt une ligne menée d'un angle du parallelogramme X a un autre angle qui luy eſt oppoſé, partage X en deux triangles tout égaux.



Dans les deux triangles ABC & BAD, AD = BC & AC = BD, le côté AB eſt commun; ainſi par le Theor, 3. § 2. *ſup.* ces deux triangles ſont égaux & equiangles.

Theoréme ſecond,

Les parallelogrãmes ABCD & BCEF qui ſont entre les mêmes paralelles, & qui ont leur baſe égale, ſont égaux.



Si la baſe de BCEF n'étoit pas la même baſe que de ABCD. ſur BC par le probléme 1. §. 3. *ſup.* ſoit fait un paralellogramme ſemblable & égal à ABCD. Je ſuppoſe que ABCD eſt rectangle ; il faut prouver qu'il eſt égal à BCEF.

AB & DC perpendiculaires entre les paralelles X & Z, ſont égales. Par l'hipotheſe F B = CE & AD = E F : partant AD + DF = EF + DF. Les deux triangles ABF & DCE ayant leurs côtez égaux, ils ſont entieremẽt égaux par le Th. 3 *ſup.* § 2. Otant de ces deux triangles égaux la partie DGF qui leur eſt commune, les trapezes ABGD & CGEF ſeront égaux. Ajoûtant donc à l'un & à l'autre la méme grandeur BGC, ce qui fait les parallelogrammes ABCD & BCEF, ces deux figures ſeront égales, ce qu'il faloit prouver.

Corollaire premier.

Donc en meſurant la ſurface d'un parallelogramme comme BCEF, il ne faut avoir égard qu'à la baſe BC & à la perpendiculaire qui meſure ſa hauteur.

Car ce parallelogramme eſt égal à un parallelogramme rectangle dont BC eſt la baſe, & dont les côtez qui ſont perpendiculaires ſont égaux à ſa hauteur. Ainſi c'eſt le Parallelogramme rectangle comme ABCD qui eſt la meſure de tous les Parallelogrammes dont les baſes ſeront égales à BC & qui auront méme hauteur, ou ſeront entre les mémes paralleles X & Z. Il ne peut y avoir qu'un Parallelogramme rectangle ſur la baſe BC entre X & Z, & il peut y avoir une infinité de Parallelogrammes non rectangles ſur la méme baſe, & entre ces mémes paralleles X & Z.

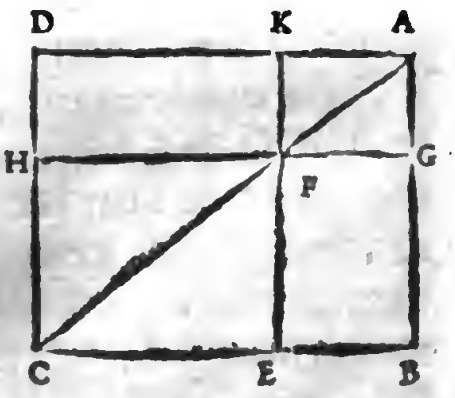
Corollaire ſecond.

Donc en meſurant l'étendue d'un parallelogramme non rectangle, il ne faut point avoir égard à ſon circuit

Car quand les côtés BF & CE ſeroient d'un million de lieües ou infinis: ce qui ſe peut concevoir en ſuppoſant que les lignes X & Z ſoient prolongées à l'infiny: ce parallelogramme dont le circuit eſt infiny ne ſera pas plus grand que ABCD dont le circuit eſt finy.

Theorême troiſiéme.

Ayant partagé le Parallelogramme ABCD par HG paralelle à AD & KE paralelle à AB; de ſorte que KE & HG coupent dans le même point la Diagonale AC, les ſuplémens qui ſont à côté du diametre ſont égaux, c'eſt à dire que BEFG eſt égal à DKFH.

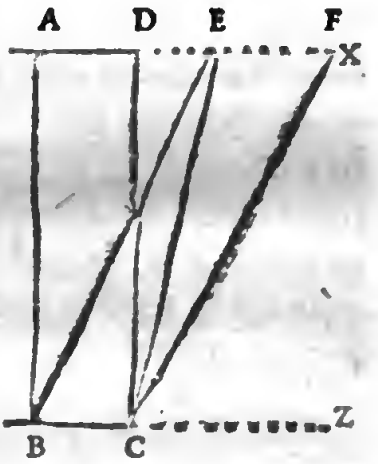


Par le Theor. 1er *ſup.* A B C= ADC & AGF= AKF & FEC= F H C : donc de deux triangles égaux ADC & A B C ôtant des grandeurs égales AKF & FHC d'une part, & AGF & FEC de l'autte, les reſtes FKDH & BEFG ſeront égaux ; ce qu'il faloit démontrer.

Theorême quatriéme.

Les Parallelogrammes ſont doubles des triangles de même hauteur, & de même baſe.

Le triangle EBC a même baſe que le Parallelogramme ABCD, & ils ont même hauteur eſtant entre les paralelles X & Z : je mene C F paralelles à B E pour faire le Parallelogramme BCFE, lequel par le Theor. 2 *ſup.* eſt égal à A B C D : or par le Theor, 1. *ſup.* BEC eſt égal à E C F, donc BCFE ou la grandeur égale ABCD, eſt le double de BEC.



Corollaire premier.

Donc les triangles de même baſe & de même hauteur ſont égaux.

Puis qu'ils ſont tous la moitié d'un Parallelogramme de même baſe & de même hauteur.

Corollaire ſecond.

Donc pour meſurer la ſurface d'un

triangle, il ne faut avoir égard qu'à ſa hauteur & à ſa baſe.

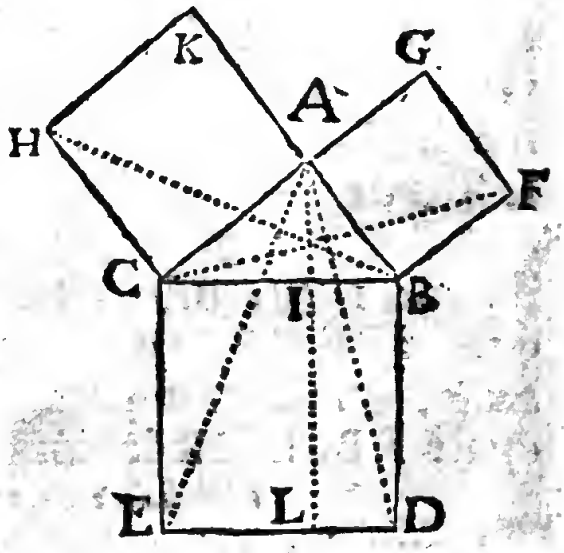
Puis qu'il eſt égal à la moitié d'un Parallelogramme, qui a même baſe & même hauteur.

Definition.

Dans un triangle rectangle le côté oppoſé à l'angle droit ſe nomme Hypothenuſe. *Theoréme cinquiéme.*

Dans le triangle rectangle ABC le quarré de l'Hypothenuſe, ou du côté qui ſoûtient l'angle droit, eſt égal aux deux quarrez des deux autres côtez.

L'Hypothenuſe eſt CB, je faits ſur les trois côtez AB, BC, CA, trois quarrez. Il faut prouver que BCED = ABFG + ACHK.



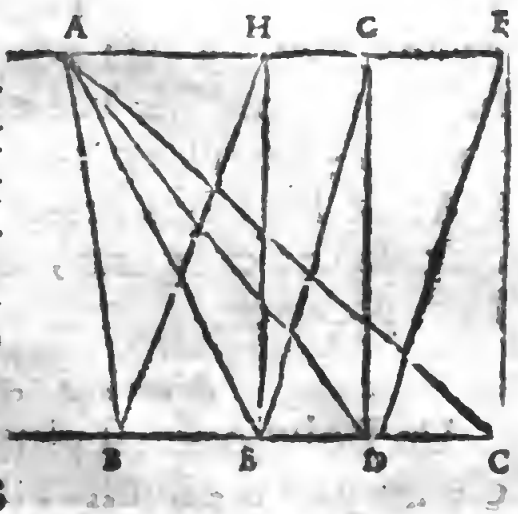
Je mene par le point A ſommet de l'angle droit, AL paralelle à BD ou CE, & de H une ligne à B, & de E une autre ligne au point A qui font les deux triangles HCB & ACE: les lignes KA & AB ne font qu'une même ligne, par le Coroll. du Theor. 2. §. 1 *ſup.* Par la definition du quarré les angles KAG & GAB & tous les autres de ces quarrez étant

droits; ainſi par le Th. 5, ſ 3 KA, partant KB eſt paralelle à HC ; ajoûtant aux angles droits A C H & B C E à l'un & à l'autre l'angle ACB, il faut que HCB = A C E : or les côtez qui comprennent ces angles ſont égaux, HC = AC & C B = C E, par la definit. du quarré ; donc ces triangles HCB & ACE ſont égaux. Or par le Th. 4, *ſup.* le quarré ACHK eſt double de HCB ; partant de ACE ; qui par le même Theor. n'eſt que la moitié de CILE : il faut donc que CILE ſoit égal à A C H K.

Par la même voye on démontre que BDLI eſt égal à ABFG : or CELI + BDLI = BCED, donc BCED = ABFG + ACHK : ce qu'il faloit prouver.

Theoréme ſixiéme.

Un triangle eſt égal à deux ou pluſieurs triãgles de même hauteur, & dont les baſes priſes enſemble ſont égales à la ſienne.



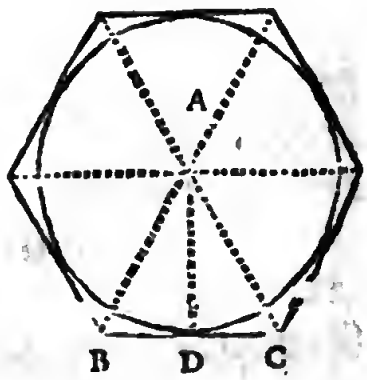
Le triãgle ABC eſt égal aux triangles ABE, AED, & ADC, qui ſont ſes parties. Or, par le Coroll. 1er du Theor. 4. *ſup.* ACD = CFD, & DAE = DGE, & EAB = EHB : donc CAB

eſt égal à deux ouplusieurs triangles, &c. Ce qu'il faloit prouver.

Theoréme ſeptiéme.

La ſurface d'un Polygone eſt égale à un triangle qui a pour baſe le circuit de ce Polygone, & pour hauteur le rayon du cercle qui luy eſt inſcrit.

Si c'eſt par exemple un exagone; ayant mené des lignes du centre A à chaque angle, on le reduit en autant de triangles qu'il a de côtez, ſçavoir en ſix, qui ſont tous égaux au triangle ABC, qui par le Coroll. 2 du Th. 4. *ſup.* eſt égal au triangle qui a BC pour baſe, & qui eſt de même hauteur, laquelle eſt icy le Rayon AD qui eſt perpendiculaire ſur BC; or par le Theor. precedant, un triangle qui a AD pour hauteur & pour baſe le circuit de cet exagone, eſt égal à tous ces ſix triangles dont la hauteur eſt DA, & les baſes priſes enſemble, le circuit de cet exagone, qui eſt ce qu'il faloit prouver.



Premiere demande.

Un Polygone eſt plus grand que le cercle auquel il eſt circonſcrit.

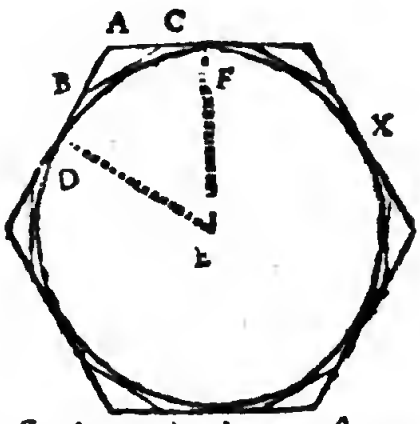
Seconde demande.

Un Polygone eſt plus petit que le cercle dans lequel il eſt inſcrit.

Theoréme huitiéme.

De deux Polygones circonſcrits à un cercle, celuy qui a plus de côtez a un plus petit circuit, & une plus petite ſurface.

X eſt un exagone circonſcrit à un cercle, je diviſe ſes côtez pour faire un autre Polygone qui ait plus de côtez en menant des tangentes, de ſorte qu'étãt hors du cercle, il eſt toujours plus grand que ce cercle par la 1re demande. Je conſidere la même partie de ces deux Polygones, c'eſt à dire, qui ſoit circonſcrite à la même partie du cercle, par exemple à E F D. Il eſt evident que D B + B A + AC + C F ſont plus grands que DB + BC + CF; donc il faut 1° que le circuit de celuy qui a moins de côtez ſoit plus grand. 2° Puiſque la figure EFCABD excede EFCBD de la grandeur du triangle ABC, la ſurface de celuy qui a plus de côtez eſt plus petite.



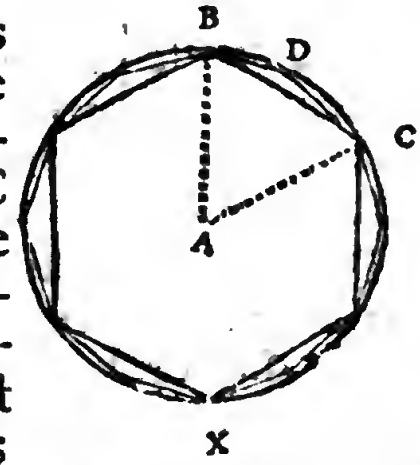
Corollaire.

Donc puiſque plus un Polygone a de

côtez, plus il eſt petit, demeurant toujours plus grand, par la premiere demande *ſup.* que le cercle auquel il eſt circonſcrit ; il s'enſuit que plus un Polygone a de côtez, ſon circuit & ſa ſurface approchent plus du circuit & de la ſurface du cercle auquel il eſt circonſcrit ; & qu'ainſi un Polygone circonſcrit d'une infinité de côtez ne differe point du cercle.

Theorême neuviéme.

De deux Polygones inſcrits à un même cercle, celuy qui a plus de côtez a un plus grand circuit & une plus grande ſurface.



Deux Polygones étant inſcrits dans le cercle X ; je conſidere la partie A B D C & les parties de ces deux Polygones qui y répondent. 1° BD+DC eſt plus grand que BC ; partant le circuit de celuy qui a plus de côtez eſt déja plus grand.

2° La figure ABDC ſurpaſſe ABC de la grandeur du triangle BDC ; ainſi le Polygone qui a plus de côtez eſt plus grand, ce qu'il faloit prouver.

Corollaire premier.

Donc puiſque de deux ou pluſieurs Polygones

Polygones inſcrits dans un même cercle, celuy-là eſt plus grand qui a plus de côtez demeurant toujours plus petit que le cercle, par la demande 2e *ſup.* il s'enſuit que plus un polygone inſcrit a de côtez, plus il approche de la circonference & de la ſurface du cercle; & qu'ainſi un Polygone qui a une infinité de côtez ne differe point du cercle.

Theorême dixiéme.

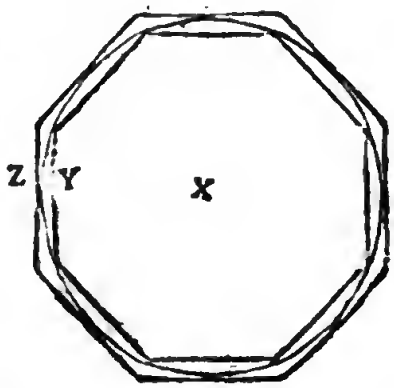
La ſurface d'un cercle eſt égale à un triangle qui a pour ſa hauteur le rayon de ce cercle, & pour baſe la circonference.

On peut ſuppoſer ſelon les deux Theorêmes precedans & leurs Corollaires, qu'un cercle eſt égal à un Polygone d'une infinité de côtez, qui luy eſt circonſcrit, ou inſcrit. Diſons icy qu'il eſt égal à un Polygone circonſcrit. Par le Th. 7 *ſup.* la ſurface de ce Polygone eſt égale à un triangle qui a pour baſe la circonference, & pour hauteur le rayon du cercle auquel il eſt circonſcrit; ainſi la ſurface d'un cercle qui luy eſt égal, eſt égale à un triangle, dont la baſe eſt égale à ſa circonference, & la hauteur eſt égale à ſon rayon.

Scholie.

Il eſt facile, un cercle étant donné, de trouver une ſurface dont la difference avec celle de ce cercle ſoit plus petite qu'une grandeur donnée.

Soit le cercle donné X: je ſuppoſe qu'un Polygone que je nomme Z luy ſoit circonſcrit, & un autre que j'appelle Y luy ſoit inſcrit. La grandeur donnée, qui eſt la difference de la ſurface du cercle à une autre ſurface eſt T.



I'augmente ou je diminuë les côtez des Polygones Z & Y juſqu'à ce que leur difference ſoit plus petite que la grandeur T, ce qui eſt facile : car en augmentant les côtez de l'un & de l'autre. 1. On augmente la grandeur de Y, puiſque par le Theor. 9 *ſup.* de deux Polygones inſcrits à un même cercle, celuy qui a plus de côtez a un plus grand circuit & une plus grande ſurface; & on diminuë celle de Z, puiſque par le Theor. 8 precedant, plus un Polygone circonſcrit a de côtez, plus ſon circuit eſt petit & ſa ſurface petite : ainſi l'un & l'autre approchent plus de la circonference du cercle. La difference de Z avec Y eſt plus grande que celle de Z avec X, puiſque X eſt plus grand que Y : donc la difference des ſurfaces de Z & de Y eſtant plus petite que la grandeur T : on trouve une ſurface qui differe de celle du cercle d'une grandeur, beaucoup plus petite que celle qu'on avoit propoſée; c'eſt à dire que ſi on propoſoit de trouver une ſurface qui ne differe de celle d'un cercle donné que de la cent-miliéme partie d'une ligne, on en pourroit trouver une qui differeroit encore de moins.

ELEMENS DE GEOMETRIE, OV DE LA MESVRE DV CORPS.

LIVRE TROISIE'ME.

Des raiſons & proportions des lignes & des ſurfaces.

AVERTISSEMENT.

EN parlant icy des raiſons & des proportions que les lignes & les ſurfaces ont entr'elles, je ne repete point ce que j'ay dit dans le traité de la Grandeur des raiſons & des proportions en general, je n'ay

pas crû auſſi devoir parler icy de la proportion Arithmetique, parce que je n'avois rien à ajoûter à ce que j'en ay dit dans le traité de la Grandeur qui ſoit particulier aux lignes & aux ſurfaces. Ie ſuppoſe qu'on a vû ce traité. Neanmoins en faveur de ceux qui ne l'ont pas lû, j'en ay extrait les propoſitions qu'il eſt neceſſaire d'avoir preſentes à l'eſprit pour lire avec plaiſir ce troiſiéme Livre, avant lequel il faut ainſi lire ces propoſitions que vous trouverez à la fin de ce volume.

SECTION PREMIERE.

Des raiſons & des proportions des lignes.

Definitions.

Premiere definition.

ESpace paralelle, eſt un eſpace compris entre deux lignes paralelles.

Seconde definition.

Deux lignes dans un même ou different eſpace paralelle ſont dites également obliques, lors qu'elles font les mêmes angles ſur les lignes paralelles qui comprennent cet eſpace.

Troiſiéme definition.

Deux triangles ſont dits ſemblables

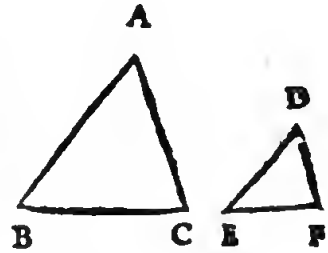
lors que leurs côtez ſont des angles égaux.

Quatriéme definition.

Les côtez de deux triangles qui ſont les mêmes angles, s'appellent Omologues.

Scholie

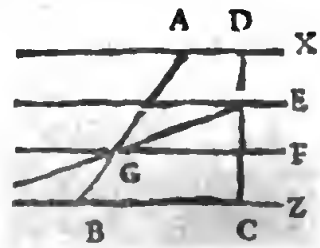
Si le côté AB fait avec BC le même angle que DE fait avec EF, les côtez AB & DE ſont Omologues, c'eſt à dire, proportionnels : on démontrera dans la ſuite que ce nom leur convient.



Lemme premier.

Si l'on coupe l'eſpace qui eſt entre les paralelles X & Z (où la perpendiculaire CD qui meſure cet eſpace) par des paralelles à X & à Z, je dis que l'oblique AB entre X & Z ſera partagée en autant de parties que la perpendiculaire CD.

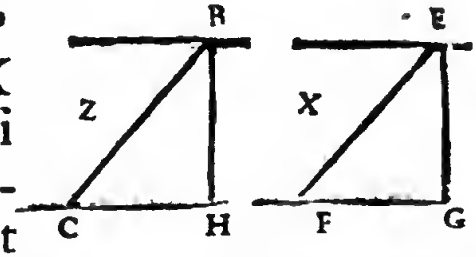
Que cela ne ſoit, & que E & F qui partagent CD en trois, ne diviſent AB qu'en deux. Alors ſi la ligne F coupe AB en G, il faut que E la rencontre en ce point, puiſque toutes deux coupēt AB dans un ſeul point. Or cela eſt contre la nature des paralelles qui ne ſe rencontrēt jamais. Donc cette hypotheſe que AB n'étoit pas coupée en autant de parties que CD, eſt fauſſe.



Lemme ſecond.

Les lignes également obliques dans des eſpaces égaux, ſont égales.

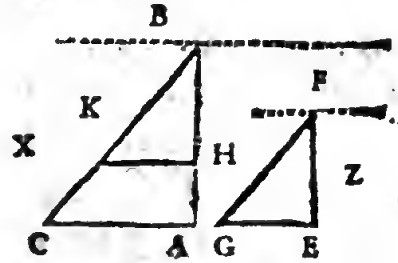
1° Les lignes BC & EF ſont également obliques, c'eſt à dire, par la ſeconde definition que l'angle B C H = E F G, 2° les eſpaces Z & X ſont égaux, ainſi les perpendiculaires BH & EG ſont égales, 3° les deux triangles BCH & EFG eſtant rectangles, & les angles BCH & EFG eſtans égaux ils ſont equiangles, ayans donc un côté égal, ils ſont entierement égaux, partant BC = FF; ce qu'il faloit prouver..



Lemme troiſiéme.

Les lignes également obliques dans des eſpaces paralelles inégaux, ſont inégales : plus grandes ſi l'eſpace eſt plus grand, plus petites ſi l'eſpace eſt plus petit.

Les lignes BC & GF ſont également obliques dans les eſpaces X & Z, la perpendiculaire AB eſt plus grande que EF, ainſi l'eſpace X eſt plus grand que l'eſpace Z : il faut donc démontrer que l'oblique FG eſt plus petite que l'oblique B C.



Soit pris ſur BA la partie BH égale à FE, & par H ſoit menée une paralelle à la baſe CA, les deux triangles ABC & EFG eſtant rectangles, & l'angle BCA égal à FGE, ils ſont equiangles. Par le Theor. 10, § 1, l. 2. l'angle BKH eſt égal à BCA, & BHK à BAC, ainſi le triangle BKH eſt equiangle avec BAC; & partant avec FGE: or FE eſt ſuppoſé égal à BH: donc par le Theor. 4, § 2, l. 2, FG = BK; partant FG égale à BK eſt plus petite que BC, dont BK eſt partie. Ce qu'il faloit démontrer.

Theoréme premier.

Ayant partagé un eſpace paralelle par deux ou pluſieurs paralelles, la perpendiculaire de cet eſpace & la ligne oblique qui y ſera, ſeront coupées proportionnellement.

1° La ligne oblique ſera coupée en autant de parties que la perpendiculaire, par le Lemme 1er *ſup.* Si par exemple, la perpendiculaire eſt coupée en cent parties, l'oblique ſera auſſi coupée en cent parties.

2° Si les parties de la perpendiculaire ſont égales entr'elles, celles de l'oblique ſeront égales entr'elles, par le Lemme 2^e

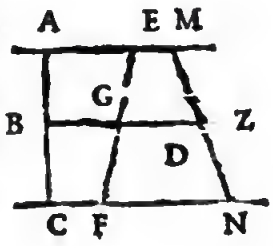
ſup. car par le Theor. 10 § 1, l. 2. ces obliques ſont les mêmes angles ſur ces paralelles, ainſi elles ſont également obliques, ainſi ſi les cent parties, dans leſquelles la perpendiculaire a eſté coupée ſont toutes égales, les cent parties de l'oblique ſeront auſſi toutes égales.

3° Si les parties de la perpendiculaire ſont inégales, celles de l'oblique ſont auſſi inégales, ou ſi ayant pris cent parties égales dans la perpendiculaire, il reſte une partie qui eſt ou plus petite, ou plus grande, l'oblique ſe trouvera auſſi diviſée ; de ſorte qu'aprés les cent parties égales, il y aura un reſte plus petit, ſi le reſte de la perpendiculaire eſt plus petit ; plus grand, ſi le reſte de la perpendiculaire eſt plus grand, comme il eſt evident, par le Lemme 3 *ſup.* Partant comme la toute ſera contenuë, ou contiendra la toute, les parties ſeront contenuës ou contiendront les parties. Ainſi ſelon la notion des proportions, les deux lignes dont il eſt queſtion ſont coupées proportionnellement.

Theorême ſecond.

Pluſieurs lignes obliques eſtant dans un même eſpace paralelle, ſi on coupe cet eſpace par une ligne paralelle, ces lignes ſeront coupées proportionnellement.

Les lignes obliques E F & M N ſont entre deux paralelles entre leſquelles AC eſt perpendiculaire, cet eſpace eſt partagé par Z une paralelle : donc par le Theor. precedant MN, AC :: MD, AB & par le même Theor. EF, AC :: EG, AB.



Permutando $AC \left\{ \begin{matrix} MN \\ EF \end{matrix} \right. :: AB \left\{ \begin{matrix} MD \\ EG \end{matrix} \right.$

Par conſequent ſelon la 16e propoſ. du l. 3. *Grand.* la raiſon de MN avec EF eſt la même que celle de MD avec EG, ainſi MN, EF :: MD, EG : ce qu'il faloit prouver.

Theoréme troiſiéme.

Les lignes également obliques dans des eſpaces paralelles differens, ſont entr'elles comme ces eſpaces.

BC & FG ſont également obliques, par conſequent ſi AB eſt égal à EF, par le Lemme 2 *ſup.* BC = FG.

Si A B eſt plus grand que E F, par le Lemme 3 *ſup.* BC ſera plus grand que FG.

Si AB eſt par exemple triple de EF, alors BC ſera triple de F G : car ſuppoſant que B A eſt partagé en trois parties égales : par le

Lemme 1. *ſup.* B C ſera auſſi partagé en trois parties, leſquelles par le 2ᵉ Lem. *ſup.* ſeront chacune égale à GF ; car ſes parties, par le Th. 10, § 1, l. 2 ſont les mêmes angles ; ainſi elles ſont également obliques; ainſi BC eſt triple de FG, comme nous venons de le démontrer.

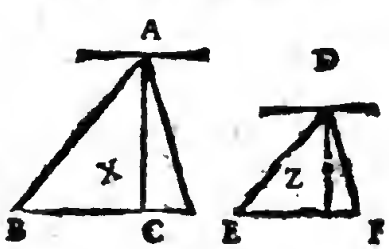
Par cette methode on démontrera que telle partie qu'eſt E F de A B, l'oblique FG eſt partie de l'oblique B C, ou que comme E F ſera contenuë en A B, auſſi FG ſera contenuë en BC.

Si A B eſt égal ou contient une ou pluſieurs fois E F, plus quelque reſte, par la même methode on démontrera que B C contient de la même maniere une ou pluſieurs fois exactement, F G, plus quelque reſte. Ainſi les lignes également obliques, &c. ce qu'il faloit démontrer.

Theorême quatriéme.

Deux triangles ſemblables ont leurs côtez proportionnels.

Je mene par le ſommet des deux triãgles ABC & DEF des lignes paralelles à leurs baſes, & j'abaiſſe de leur ſommet ſur leur baſe les perpendiculaires X & Z.



Par l'hipotheſe, ſelon la 2ᵉ defin. les angles ABC & DEF ſont

égaux, ainſi AB & DE ſont également obliques. A C & D F ſont par la même raiſon également obliques. Donc par le Theor. precedant ∢ A B D E :: X. Z.
∢ A C D F :: X. Z.

Donc puiſque deux raiſons égales à une troiſiéme ſont égales entr'elles, par la 16 prop. du l. 3 *Grand.* AB, DE :: AC. DF, en menant par B & E des lignes paralelles aux côtez AC & DF, on demontrera de la même maniere que AB, DE :: B C, E F, & qu'ainſi deux triangles ſemblables ont tous leurs côtez proportionnels.

Scholie.

C'eſt pour cette raiſon qu'on appelle omologues les côtez qui ſe répondent dans les figures ſemblables, parce que ces côtez ſont proportionnels les uns aux autres, ou qu'ils ont même raiſon, ce que ſignifie ce mot *Omologue.*

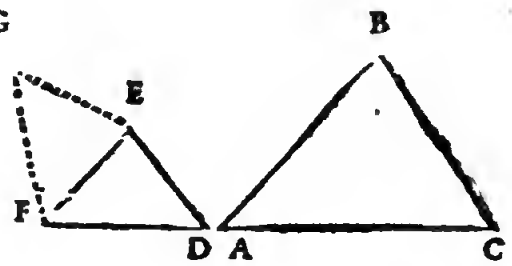
Theoréme cinquiéme.

Si dans deux triangles, les côtez qui comprennent l'angle du ſommet ſont proportionnels, les deux triangles ſont ſemblables.

Dans les deux triangles ABC & DEF, les côtez qui comprennent l'angle du ſommet ſont proportionnels, je dis que ces deux triangles ſont ſemblables, c'eſt à dire, par la 3e definit. qu'ils ont mêmes angles.

Je faits ſur le côté FE l'angle EFG= B A C & l'angle FEG= ABC, partant l'angle EGF= BCA: ainſi ces deux trian-

gles ſont ſemblables. Donc EG,EF :: BC, AB : or par la ſuppoſition BC,AB : :DE, EF : donc EG EF :: DE EF : partant EG & DE ayant même raiſon avec EF, ce ſont deux grãdeurs

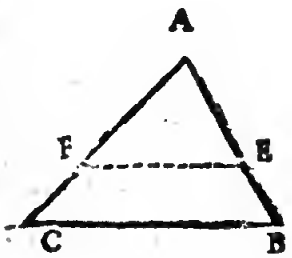


égales, par la 15e propoſ. du l. 3 *Gran.* Je démontreray de la même maniere que DF= FG, partant les triangles FDE & FGE eſtant égaux ils ſont equiangles par Th. 3. §. 2. l. 2. donc les deux triangles FDE & ABC, étant ſemblables à un troiſiéme,c'eſt à dire, à EGF,ils ſont ſemblables entr'eux: ce qu'il faloit démontrer.

Theoréme ſixiéme.

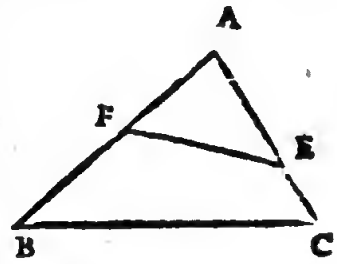
Lors qu'on coupe deux côtez d'un triangle par une ligne paralelle à la baſe de cet angle,ces côtez ſont coupez proportionnellement.

Soit le triangle ABC, je mene EF paralelle à BC, je dis que AB, AE : : AC,AF. Le triangle AEF eſt ſemblable au triangle ABC, puiſque l'angle AEF= ABC & l'angle AFE= ACB, par le Theor. 10, § 1, l. 2. Donc par le Theor. 4 *ſup.* AB, AE :: AC, AF.

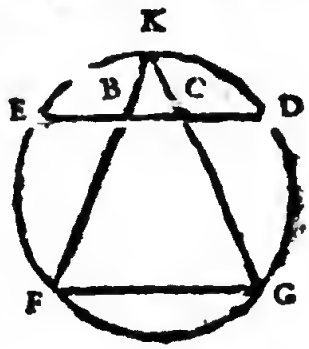


Scholie.

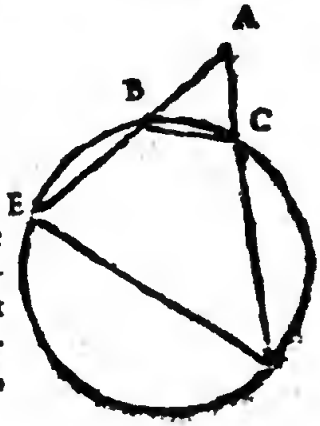
Les lignes paralelles font des angles égaux d'un même côté avec les lignes qu'elles coupent. On appelle lignes antiparalelles celles qui ſur la ligne qu'elles coupét font bien les mêmes angles, mais d'un autre côté : ainſi l'angle AEF eſtant égal à l'angle ABC, ces deux lignes EF & BC ſont antiparalelles ; & voilà ce qui arrive dans ce cas. Le triangle AEF a les mêmes angles que ABC ; ainſi ils ſont tous deux ſemblables, & leurs côtez ſont proportionnels ; mais leurs côtez omologues n'ont pas la même ſituation : car AB n'eſt pas omologue avec AF, mais avec AE ainſi ces côtez AB & AC ne ſont pas coupez dans une proportion droite : AB n'eſt pas à AF comme AC à AE, de ſorte que de ces quatre grandeurs la premiere eſt à la quatriéme, comme la troiſiéme eſt à la ſeconde, AB, AE ; : AC, AF, ce qui s'appelle être reciproque ; ainſi il n'eſt queſtion que de bien remarquer qui ſont les côtez omologues, c'eſt à dire, qui font les mêmes angles.



Il n'eſt pas difficile de reconnoître ſi deux lignes ſont antiparalelles, ou non, ſi par les points E & D également éloignez de K, ſommet du triangle FKG, on mene la ligne ED, cette ligne & FG ſeront antiparalelles ; Car par le Coroll. 6 du Theor. 2 de la ſeconde § 1. 2, l'angle KBD a pour ſa meſure la moitié de l'arc EF, plus celles de KD ou de KE égal à KD. Or la moitié de KF eſt auſſi la meſure de KGF par le Theor. 2 de la premiere, §, l. 2. Donc KBC = KGF, par le même raiſonnement à KCB = kFG ; ainſi ſelon la notion des antiparalelles FG & BC ſont antiparalelles, & ED par conſequent coupe reciproquement kF & kG, ainſi kF, kC, :: kG, kB.



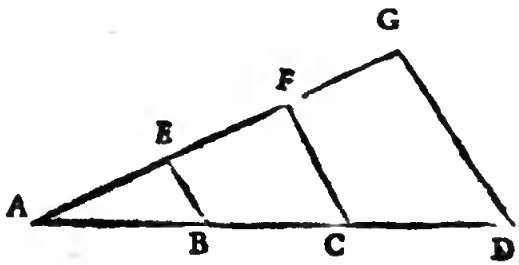
L'angle ABC a pour ſa meſure par le Coroll. 7. Theor. 2, § 2. l. 2, la moitié de l'arc BC & de l'arc BE : donc il eſt égal à CFE qui a même meſure, par le Th, 12, § 1, l. 2. Par le même raiſonnement ACB = AEF : donc BC & EF ſont antiparalelles, ainſi BC coupe reciproquement AE & AF, & par conſequent AE, AC : ; AF, AB,



Problême premier.

Couper une ligne droite ſemblablement à une ligne qui eſt déja coupée.

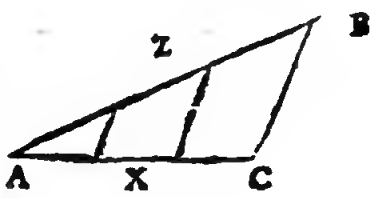
La ligne AD eſt coupée en trois parties AB, BC, CD : on propoſe de couper la ligne AG en trois parties proportionnelles à celles de AD : je joints AG avec AD, de ſorte qu'elles faſſent un angle, quel qu'il ſoit. Aprés je mene par les points G & D une ligne droite, & à celle-cy des paralelles par les points B & C de la coupée. Les paraleles coupent AG en trois parties, qui ſont proportionnelles à celles de AD : car par le Theor. 6 *ſup.* AD, AC :: AG, AF, & AF, AC :: AE, AB : ainſi on a fait ce qui eſtoit propoſé.



Corollaire premier.

Par ce Problême on peut diviſer une ligne preciſément en tant de parties qu'on voudra fort exactement.

La ligne donnée eſt X qu'il faut diviſer en trois parties : je la joins avec Z une ligne infinie, de ſorte qu'elles faſſent l'angle ZAX, n'importe de quelle grandeur. Ayant ouvert le compas au hazard, & mis une de ſes pointes ſur A, je marque ſur Z de ſuite avec la même ouverture trois parties égales. Aprés de B extremité de ces trois parties, je mene une ligne au point C, l'extremité



de X, & à celle-cy, des paralelles par les diviſions de Z; ſelon ce qu'on vient de démontrer A C ſera diviſé ſemblablement à AB, c'eſt à dire, en trois parties.

Corollaire ſecond.

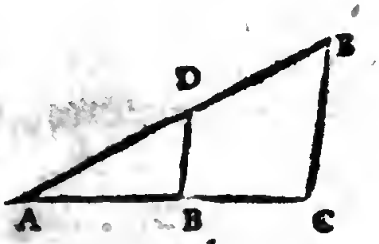
On peut par ce même moyen retrancher d'une ligne telle partie qu'on voudra.

Si de AC on veut retrancher ſa troiſiéme partie, il n'eſt queſtion que de diviſer AC en trois parties.

Problême ſecond.

Deux lignes eſtant données trouver une troiſiéme qui ſoit à la ſeconde, comme celle-là eſt à la premiere, *ou*, à deux lignes données trouver une 3e proportionnelle.

La premiere ligne eſt AB, la ſeconde BC: je joins ces deux lignes de ſorte qu'elles ne faſſent qu'une ligne droite. En ſuite je prends AD égale à BC que je joins avec AB, de ſorte qu'elles faſſent un angle quel qu'il ſoit.



Je mene de D une ligne ſur B, & à celle-cy une paralelle par le point C : je prolonge AD juſqu'à ce qu'elle rencontre la paralelle C E, ce qui eſtant fait, je dis que DE eſt la troiſiéme proportionnelle cherchée.

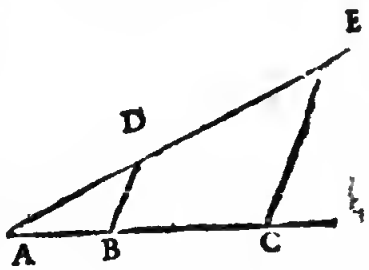
Car par le Th. 6 *ſup.* AB eſt à A D, ou à ſon égale BC, comme BC eſt à DE, ainſi ∴ AB, BC, DE, ce qui eſtoit propoſé.

Probléme troiſiéme.

Trouver une quatriéme proportion-

nelle à trois lignes qui ſont en proportion.

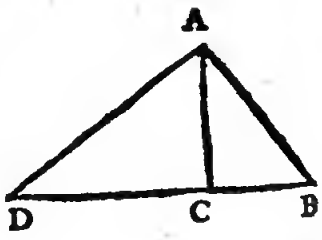
La premiere, eſt AB; la ſeconde, AD, avec leſquelles je fais l'angle quel qu'il ſoit BAD; la troiſiéme eſt BC que je joins avec AB, de ſorte que toutes deux faſſent une ligne droite. Aprês je mene par B & D une ligne droite, & à celle-cy par le point C la paralelle CE: je prolonge AD juſqu'à ce qu'elle rencontre cette paralelle CE, ce qui eſtant fait, je dis que DE eſt la proportionnelle. Car par le Th. 6 *ſup.* AB, BC :: AD DE, & par conſequent, *alternando* AB, AD :: BC, DE.



Lemme quatriéme.

Dans le triangle rectangle ABD la ligne AC menée du ſommet de l'angle droit perpendiculairement ſur BC partage ce triangle en deux triangles ſemblables entr'eux & à ABD.

1° Ils ſont tous rectangles. 2° Ils ont un de leurs angles outre le droit qui eſt égal, car les triangles ABD & ABC ont l'angle B commun. Ainſi ils ſont ſemblables. Les triangles ABD & ADC ont auſſi l'angle D commun, ils



ſont

ſont donc auſſi ſemblables, & puiſque ABC & ADC ſont ſemblables à un troiſiéme, ils ſont ſemblables entre eux, par conſequent les trois triangles rectangles ABD, BCA, CAD, ſont ſemblables.

Theorême ſeptiéme.

Lors que dans un triangle rectangle, comme eſt ABD, on mene une perpendiculaire de l'angle droit A ſur l'hipothenuſe BD.

1° La perpendiculaire AC eſt moyen proportionnel entre les deux parties BC & CD de l'hipothenuſe BD, c'eſt à dire, que ∴ BC, AC, CD.

2° Le côté majeur AD eſt moyen proportionnel entre l'hipothenuſe BD, & la plus grande partie CD, c'eſt à dire, que ∴ CD, AD, BD.

3° Le côté mineur AB eſt moyen proportionnel entre l'hipothenuſe BD & ſa plus petite partie BC, c'eſt à dire, que ∴ BC, AB, BD.

Par le Lemme *ſup.* le triangle rectangle ABD eſt diviſé par la perpendiculaire AC en deux triangles rectangles ſemblables, de ſorte que ABD, CBA, CAD ſont trois triangles ſemblables. Partant par le Theor. 4 *ſup.* 1° BC, AC :: AC, CD, ou ∴ BC, AC, CD.

2° CD, AD, :: AD, BD, ou ∴ CD, AD, BD.

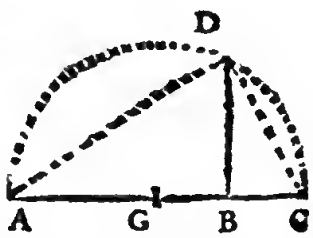
3o BC, AB :: AB, BD, ou ÷: BC, AB, BD : ce qu'il faloit démontrer.

Problême quatriéme.

Entre deux lignes données trouver une moyenne proportionnelle.

Premiere maniere.

Les deux lignes données ſont AB & BC que je joins de ſorte qu'elles font une ligne droite, du milieu de laquelle, qui eſt G, & de l'intervalle de ſa moitié, ſçavoir de de l'intervalle A G je décris un demy cercle. J'éleve en ſuite ſur B une perpendiculaire que je prolonge juſqu'à ce qu'elle ſe termine dans la circonference du cercle, ſçavoir au point D : je dis que BD eſt moyenne entre AB & BC.



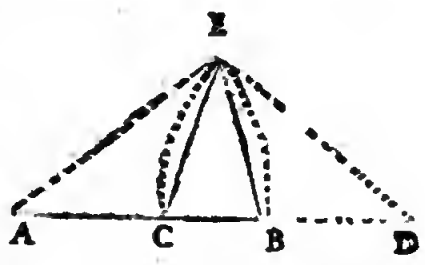
Par le Coroll. 3 du Th. 12, § 1. l. 2, l'angle A D C dans le demy cercle eſt droit, par la conſtruction BD eſt perpendiculaire. Donc par le Theor. precedant BD eſt moyenne proportionnelle entre AB & BC ÷: AB, BD BC.

Seconde maniere.

AB & CB ſont deux lignes dounées: je prolonge AB de ſorte que BD = AC : & de D & de A comme centres & d'intervalles égaux A B & C D je faits deux cercles qui ſe coupent en E : la ligne EB

ou EC ſera la moyenne entre AB & CB.

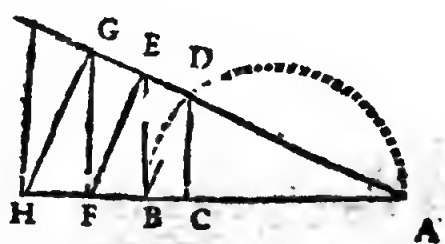
Par la conſtruction AB = AE & CE = BE, dõc EAB & CEB ſont deux Iſoſceles, ils ont l'angle commun ABE, donc par le Coroll. 2e Theor. 7 §. 2, l. 2 ces deux Iſoſceles ſont equiangles, & partant ſemblables; donc AB BE :: BE, BC ou ÷ AB, BE, BC.



Problème cinquiéme.

Ayant les trois premieres lignes d'une progreſſion Geometrique de lignes, trouver toutes les autres à l'infini.

La troiſiéme ligne eſt AB que je partage par la moitié, & de l'intervalle de cette moitié je décris un demy cercle. Je prends ſur cette ligne AB une partie AG égale à la premiere ligne, & ſur C j'éleve une perpendiculaire qui ſe termine à la circonference du cercle au point D, d'où je mene une ligne au point B, & de A par D, une ligne infinie.



Je prolonge auſſi à l'infini la ligne *AB*, que je nomme Z; en ſuite j'éleve au point B une perpendiculaire qui coupe X au point E, duquel je mene une per-

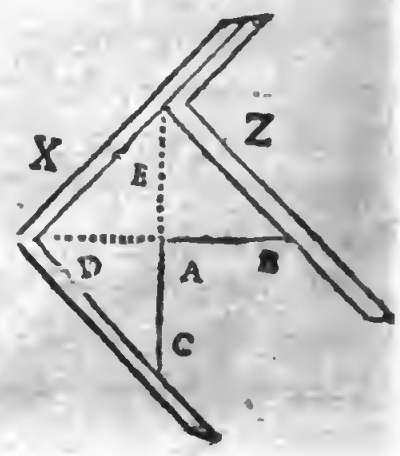
pendiculaire qui coupe Z au point F, où je dreſſe une perpendiculaire qui coupe X au point G, d'où j'abaiſſe une perpendiculaire GH, & ainſi de ſuite.

1° Par le Theor. 7 *ſup.* la ligne A D étant moyenne proportionnelle entre AC & A B, elle eſt égale à la ſeconde ligne donnée, qui ſe trouve ainſi, ſi elle n'étoit pas donnée.

2° Tous les triangles ADB, ABE, AEF, AFG, &c. ſont ſemblables, étant rectangles; car l'angle ADB dans le demy cercle eſt droit, par le Cor. 3 du Th. 12, § 1, l. 2, & par la conſtruction EF & HG ſont perpendiculaires ſur X, comme DC, BE, GF le ſont ſur Z. Tous ces triangles ont un angle commun, ſçavoir, XAZ: donc comme AD, AB :: AB, AE, & comme AB, AE. :: AE, AF, & comme AF, AG, :: AG, AH, &c. par conſequent ∴ AC, AD, AB, AE, AF, AG, AH, &c. *Scholie.*

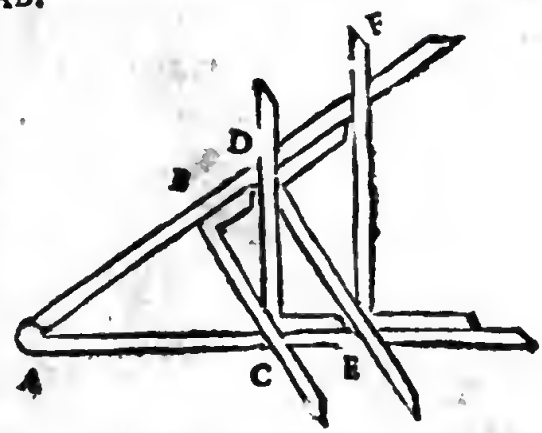
Juſqu'à preſent on n'a point découvert le moyen de trouver avec le compas & la ſeule regle deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données. On les trouve mechaniquement.

Les lignes données ſont AB & A C, qu'on joint de ſorte qu'elles font un angle droit. On diſpoſe l'equerre X de ſorte que ſon angle ſoit ſur le prolongement de A B & qu'une de ſes regles raſe C extremité de A C.



Z eſt une ſeconde equerre qu'on diſpoſe de ſorte qu'une de ſes regles raſe X, & l'autre le point B extremité de AB. ainſi les triangles CDE & DEB, ſont rectangles, & DA & EA ſont des perpendiculaires, ainſi par le Th. 7

ſup. ∺ AC, AD, AE, & par le même Theor. ∺ AD, AE, AB: donc ∺ AC, AD, AE, AB.



Cette invention eſt de Platon, Deſcartes en propoſe une autre, avec laquelle il trouve entre deux lignes données autant de propottionnelles qu'on en veut. L'inſtrument dont il ſe ſert eſt compoſé de pluſieurs equerres, qui ſont tellement ajuſtées les unes avec les autres, que lors que l'angle FAE eſt fermé, ou que les deux regles FA & AE ſe touchent, toutes les autres regles BC, CD, DE, EF ſe touchent & viennent au point A : ſi cet angle EAF s'ouvre, ces mêmes regles ſe pouſſent & ſe chaſſent.

Deux lignes étant donc données, je pouſſe la regle BC de ſotte que AB ſoit égale à la plus petite, & j'ouvre l'angle EAF de ſorte que la regle DE ſoit éloignée de A de la grandeur de la ſeconde ligne.

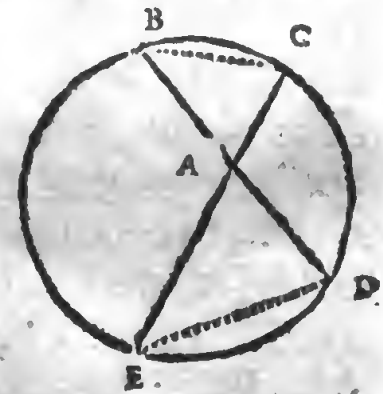
Par ce qui a eſté dit dans le Ptobl. 5 precedant, AC & AD ſeront deux moyennes propottionnelles entre AB & AE.

Pour trouver pluſieurs moyennes proportionnelles il faut augmenter le nombre des equerres.

Theoréme huitiéme.

Deux cordes qui ſe croiſent dans un cercle, ſont coupées reciproquement.

Les deux cordes ſont BD & CE, les triangles ABC & ADE ſont ſemblables; car 1° l'ãgle BAC = EAD; 2° L'angle CBD, = CED, puis qu'ils ſont appuyez ſur le même arc CD. 3° Par la même raiſon BCE = BDE : ainſi le côté *B*A eſt omologue à



AE & CA à AD, c'eſt à dire, que BA, AE :: AC, AD, par conſequent ces quatre lignes BA, AD, CA, AE ſont reciproques, c'eſt à dire, que la premiere BA eſt à la quatriéme AE, comme la troiſiéme AC eſt à la ſeconde AD.

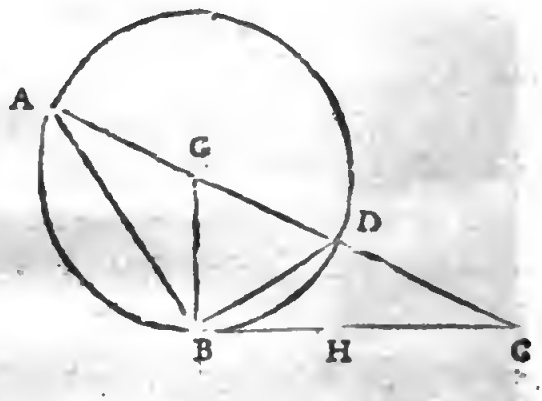
Scholie.

Ainſi quand deux lignes ſont coupées reciproquement, on doit être aſſuré qu'on peut faire paſſer un cercle par leurs quatre extremitez.

Theorême neufiéme.

BC eſt une tangente, AC eſt une ſecante qui paſſe par le centre du cercle, je dis que ∴ AC, BC, DC.

Les deux triangles ACB & DCB ont un angle commun à leur ſommet C, l'angle DBC a pour ſa meſure la moitié de l'arc BD par le Theorême 11, liv. 2, § 1, cette moitié eſt auſſi la meſure de l'angle BAC par le Th. 12. §. 1, l. 2, ainſi les deux triangles ACB & BCD ayant deux angles égaux, & par conſequent le 3e, ils ſont ſemblables & proportionnels, le côté DC du triangle BCD eſt omologue avec le côté BC du triangle ACB, ainſi. AC, BC :: BC, CD ou ∴ AC, BC CD, ce qu'il faloit démontrer.



Problême ſixiéme.

Diviſer une ligne en moyenne & extrême raiſon. Voyez la figure precedente.

C'eſt à dire, en telle ſorte que la plus grande partie ſoit moyenne proportionnelle entre la plus petite & la toute.

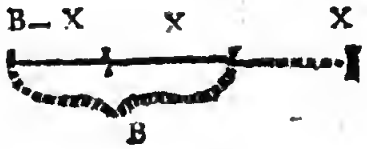
La ligne donnée eſt B C, au point B j'éleve la perpendiculaire B G qui ſoit moitié de BC : de l'intervalle de G B je faits un cercle dont le diametre ſera par conſequent égal à BC, je tire la ſecante A C : aprés quoy ayant pris CH ſur B C égale à C D, je dis que la ligne BC ſera diviſée au point H, comme il eſt requis : ſi H C ou D C eſt la plus grande partie,& BH ou BC— HC la plus petite, il faut démontrer que ∴ BC — CH,HC,BC,ou ∴ BC,— CD,CD,BC.par le Th. precedant, DC, BC :: BC, A C : or A C = BC —DC, donc DC, BC,: : BC, DC—BC.

Permutando BC, DC : : DC—BC, B C.

Dividendo B C — D C eſt à D C comme DC—BC— BC, c'eſt à dire, DC (car—BC — BC = o) eſt à BC : or BC— DC = BH & DC = HC, donc ∴ BH, HC, BC ; ce qu'il faloit démontrer.

Corollaire premier.

La ligne B eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon, X eſt la plus grande partie qu'on appelle la Mediane, & B— X eſt la

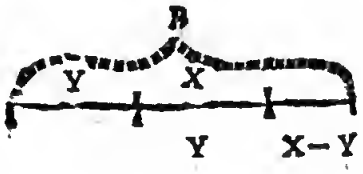


plus petite. Je dis que ſi on ajouſte X à B, cette grandeur X + B ſera diviſée en moyenne & extrême raiſon, & que B ſera la mediane, c'eſt à dire que ∴ X+B. B, X.

Par l'hipotheſe ∴ B, X, B −X, ou B, X : : X. B − X, *permutando* X B : : B − X X, *componendo* X+B. B : : B − X+X X, & puiſque B −X+X = o, il faut que B − X+X = B, ainſi ∴ X+B, B, X, ce qu'il faloit prouver.

Corollaire ſecond.

La ligne B étant diviſée en moyenne & extrême raiſon, la petite partie eſt Y, la mediane X: ainſi ∴ Y. X, Y+X : je dis que retranchant Y de X, on aura une ligne diviſée en moyenne & extrême raiſon ; c'eſt à dire que X − Y. Y : : Y, X, ou ∴ X − Y. Y. X.



Par l'hipotheſe ∴ Y. X. Y+X, ou Y, X : : X, Y + X, donc *permutando* X. Y : : Y + X. X & *dividendo* X − Y. Y : : Y + X − X. X, & puiſque +X − X = o il faut que Y+X − X = Y, ainſi X − Y. Y : : Y. X, c'eſt à dire que ∴ X − Y, Y. X: ce qu'il faloit prouver.

Corollaire troiſième.

Du premier Corollaire il eſt aiſé de conclure que lors qu'on a une ligne diviſée en moyenne & extrême raiſon, on en peut avoir une infinité d'autres plus grandes diviſées en moyenne & extrême raiſon, ſi on ajoûte à la toute la mediane: Et par le ſecond Corollaire qu'on en peut avoir une infinité de plus petites toutes diviſées en moyenne & extrême raiſon, en retranchant la plus petite de la mediane.

Lemme quatriéme.

Dans le triangle Iſoſcele A B C, ſi les angles de la baſe ſont doubles de celuy du ſommet. Je dis que la ligne B D, qui coupe par la moitié ACB, un des angles de la baſe, coupe AB en moyenne & extrême raiſon.

1° Puiſque l'angle BCA eſt double de BAC; donc la moitié DCA ſera égale à l'angle CAD : partant le triangle ADC ayant les angles égaux ſur la baſe A C, il eſt Iſoſcele par le Th. 7, §, 2, l. 2.

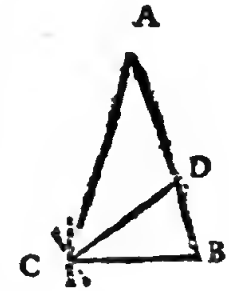
2° L'angle BDC eſt égal aux deux oppoſez DAC & ACD, par le Coroll. 2 du Th. 2, § 2, l. 2 par conſequent il eſt égal à l'angle ACB qui vaut ces deux angles, & à DBC qui eſt égal par l'hipotheſe à ACB, ainſi le triangle DCB ayant les angles ſur la baſe D B égaux, eſt encore Iſoſcele, ainſi DC = BC.

3° Les deux triangles Iſoſceles B A C & B C D qui ont un angle commun au point B, par le Cor. 2 du Th. 7, § 2, l. 2, ſont equiangles, & partant ſemblables : donc par le Th. 4 *ſup.* AB eſt à BC, ou à AD égal à BC, comme DC, ou ſon égale, AD eſt à DB, c'eſt à dire ∴ AB, AD, DB, & par conſequent AB eſt coupé en moyenne & extrême raiſon, puiſque la

partie AD eſt moyenne entre la toute AB, & l'autre partie D B.

Lemme cinquiéme.

Si on diviſe AB en moyenne & extrême raiſon au point D : que de B & de D comme centres & de l'intervalle de la mediane D A on faſſe deux arcs qui ſe coupent en C, d'où l'on mene les lignes AC, DC, CB, le triangle ABC ſera Iſoſcele, & chaque angle de ſa baſe double de l'angle du ſommet.

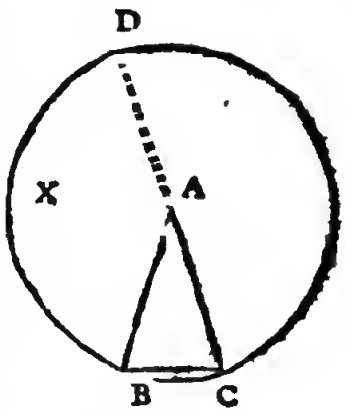


Par la conſtruction B C = DC = AD, ainſi ADC & DCB ſont Iſoſceles, & puiſque :: A B. AD. DB. & que par la conſtruction AD = BC = DC, il s'enſuit que AB, BC : : DC. DB. donc par le Theor. 5 *ſup.* B A C & DCB ſont equiangles, & partant B A C eſt Iſoſcele : or l'angle B D C eſt égal à DAC + ACD les oppoſez interieurs qui ſont égaux, puiſque ADC eſt Iſoſcele : donc DBC égal à B D C eſt le double de BAC.

Lemme ſixiéme.

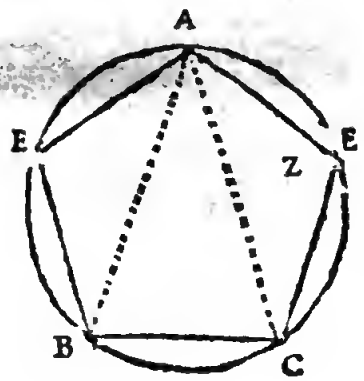
BC eſt un des côtez d'un decagone inſcrit dans le cercle X, je dis que les angles ABC & ABC de la baſe de l'Iſoſcele BAC ſont doubles de celuy du ſommet qui eſt l'angle du centre du decagone.

Cet angle du centre du decagone a pour meſure la corde ou l'arc BC de 36 degrez 10e partie du cercle, l'ãgle ACB a pour meſure la moitié de l'arc BD, qui eſt complément de l'angle BAC, & par conſequent de 144 degrez, dont la moitié ſeptante-deux qui eſt la meſure de l'angle ACB, eſt double de trente-ſix degrez, meſure de l'angle BAC.



Lemme ſeptiéme.

BC eſt le côté d'un pentagone regulier inſcrit dans le cercle Z, les deux lignes AB, AC qui ſont cordes des angles BEA & CFA, qui ſont égaux, ſont égales : ainſi ABC eſt un Iſoſcele, dont chacun des angles de la baſe eſt double de celuy du ſommet, ce qu'il faut prouver.



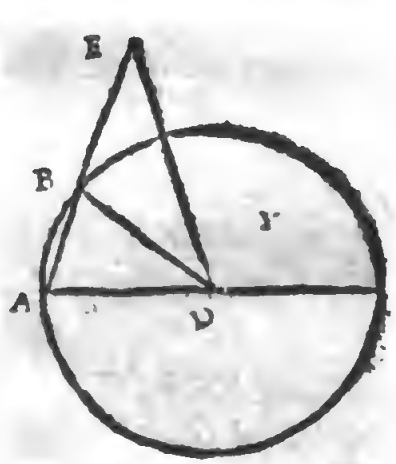
Par le Th. 12, §. 1. l. 2, l'angle BAC a pour meſure la moitié de l'arc BC, & l'angle ACB la moitié de l'arc AEB : or cet arc eſt double de BC ; donc l'angle ACB eſt double de l'angle BAC ; ce qu'il faloit démontrer.

ces deux angles ſont égaux ; ainſi par le Th. 7, § 2, l. 2, EBC eſt Iſoſcele, & partant BE = BC : ainſi BC eſt un des côtés du pentagone, ce qu'il faloit prouver.

2° Par la même raiſon CF, = FD, & puiſque BD = FE cordes des mêmes angles, il faut que CE = CD : ainſi ECD eſt un Iſocele. Le triangle BED eſt auſſi Iſoſcele, puiſque BE = ED, car on ſuppoſe que Z eſt nn pentagone regulier: ces deux Iſoſceles ont un angle commun au point D ; donc ils ſont equiangles par le Coroll. 2, Th. 7, §. 2; l. 2, ainſi par le Theor. 4 *ſup.* comme BD eſt à BE, ou ſon égale BC; ainſi ED ou ſon égale BC, ſera à CD, c'eſt à dire ∴ BD, BC, CD, & par conſequent, ſelon la notion de la moyenne & extrême raiſon BD eſt coupé comme il a eſté propoſé.

Theorême douzième.

La ligne droite compoſée du côté de l'exagone & du decagone inſcrits au même cercle, eſt coupée en moyenne & extrême raiſon.



Soit AB côté du decagone, & BE côté de l'exagone, c'eſt à dire, une ligne égale au rayon B D, comme il a eſté démontré Prob. 6 § 3, l. 2 ; je dis

que AE eſt coupé en moyenne & extrême raiſon au point B.

EBD eſt Iſoſcele, puiſque BE eſt ſuppoſée égale au rayon B D, le triangle ADB eſt auſſi Iſoſcele, & par le Lem. 6. *ſup.* l'angle BAD, ou ABD eſt double de BDA : or DBA eſt auſſi double de BDE puiſque par le Cor. 2, Th. 2, § 2, l. 2, il eſt égal aux deux angles égaux BED, & EDB : donc BED & BDA ſont égaux entr'eux & pris enſemble ils ſont égaux à EAD, ainſi le triangle AED eſt Iſoſcele, partant puiſque B D coupe en deux l'angle EDA, par le Lemme 4, *ſup.* EA eſt coupée en moyenne & extrême raiſon, ce qu'il faioit démontrer.

Corollaire.

De là il s'enſuit que ſi AE eſt coupée en moyenne & extrême raiſon, dont AB petit ſegment ſoit côté d'un decagone, BE ſera le côté de l'exagone inſcrit au même cercle.

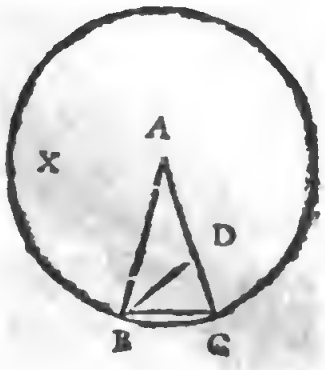
Puiſque entre AE & AB il n'y peut avoir qu'une moyenne proportionnelle ; & qu'on vient de prouver que BE côté de l'exagone eſtoit cette mediane.

Problême ſeptiéme.

Un cercle étant donné trouver la corde de dix degrez ou le côté du decagone.

Le cercle eſt X dont AB eſt le rayon, que je diviſe par le Prob. 6 *ſup.* en moyenne & extrême raiſon en D. Je prends la

corde BC égale à AD, qui ſera le côté du decagone : car par le Lemme 5 *ſup.* les angles ABC & ACB ſont doubles de BAC : donc par le Lemme 6 *ſup.* l'angle BAC eſt l'angle du centre du decagone, dont par conſequent BC eſt un des côtez.



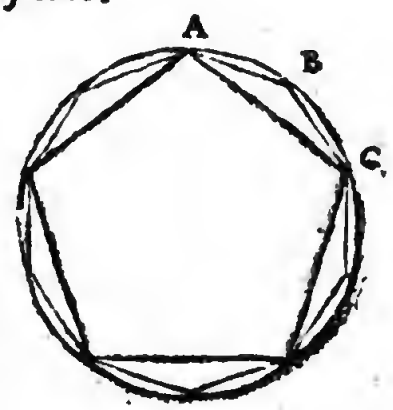
Problême huitiéme.

Décrire un decagone ſur BC, un côté donné.

Je diviſe le côté donné BC en moyenne & extrême raiſon : j'y ajoûte la mediane, ce qui me donne par le 1er Cor. du Probleme 6 *ſup.* une ligne diviſée en moyenne & extrême raiſon : dont BC ſera la mediane ; ainſi cette ligne par le Th. 10 *ſup.* ſera égale à AB rayon du cercle ou BC ſera un des côtez du decagone inſcrit.

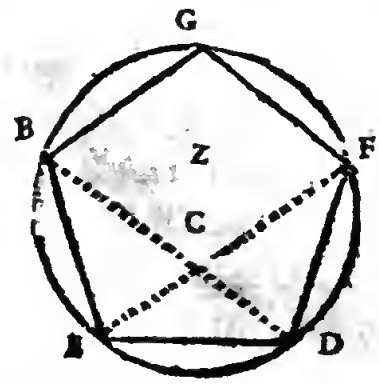
Problême neufiéme.

Un cercle étant donné trouver le côté du pentagone.



1° Par le Prob. precedant ayant trouvé le côté du decagone, on a celuy du pentagone,

coupée au point C en moyenne & extrême raiſon, dont BC égal à ED eſt la mediane : cela étant de D comme centre, & de l'intervalle B D ayant fait un arc, & de E & de l'intervalle ED ayant fait un ſecond arc, qui coupe le premier, & mené une ligne à cette ſection : on aura EB, qui ſera le ſecond côté du pentagone, les autres ſe trouveront en la même maniere.



SECTION II.

Des raiſons & proportions qu'ont les circuits des figures ſemblables.

Definition.

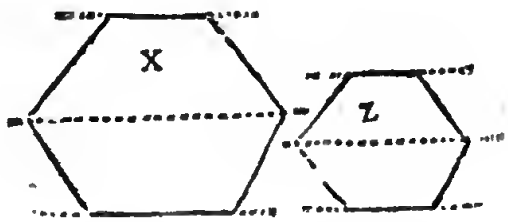
DEux figures rectilignes ſont dites ſemblables lors que les angles ſont égaux chacun à chacun, & que les côtez qui les comprennent ont même raiſon.

Theorême premier.

Les figures regulieres de même nom ſont ſemblables.

Par la ſeconde definition § 3, liv. 2, les

figures regulieres ſont celles dont tous les côtez & tous les angles ſont égaux ; ſoient donc X & Z deux figures regulieres de même nom, que je ſuppoſe exagones ; ayant mené des lignes paralelles qui renferment les côtez de ces figures : puiſque par l'hipotheſe ces deux figures ont mêmes angles, & que leurs côtez compris entre ces paralelles ſont égaux, ils feront mêmes angles dans des eſpaces paralelles égaux, par conſequent par le Th. 3, § 1 *ſup.* ils ont même raiſon entre eux, ainſi ces deux figures par la definition precedante ſont ſemblables, ce qu'il faloit prouver.



Theorême ſecond.

Les circuits de deux figures ſemblables ſont entr'eux en même raiſon que leurs côtez omologues.

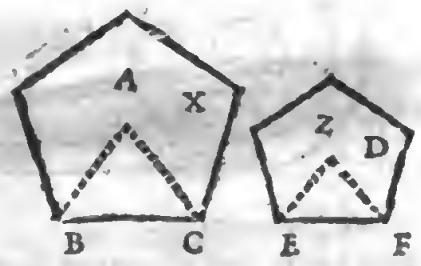
Selon la defin. precedante ces deux figures ont mêmes angles, ainſi leurs côtez ſeront en même raiſon chacun à ſon omologue ; partant ſelon la Propoſ. 24, L. 3 *Gr.* la ſomme de tous les côtez de l'une, c'eſt à dire, le circuit ſera à la ſomme de tous les cotez, ou au circuit de l'autre, comme chaque côté de l'une eſt à cha-

que côté de l'autre, qui luy eſt omologue.

Theorême troiſiéme.

Les circuits de deux figures regulieres & ſemblables, ſont entr'eux comme les rayons ou diametres des cercles où elles ſont inſcrites.

X & Z ſont deux Polygones reguliers & ſemblables. Du centre du cercle où elles ſont inſcrites je mene les lignes AB & AC, DE & DF, qui ſont leurs rayons, les deux triangles ABC & DEF ſont Iſoſceles par la conſtruction, & puiſque ces deux figures ſont ſemblables, les angles de leurs centres BAC & EDF ſont les mêmes; ainſi ces triãgles ſont ſemblables : donc AB ou le rayon de X eſt à DE rayon de Z comme BC à EF : or le circuit de X eſt à celuy de Z, par le Th. precedant, comme BC à EF, dont le circuit de X eſt à celuy de Z comme le rayon de X eſt à celuy de Z, ou comme le diametre de l'un eſt au diametre de l'autre; car les rayons & les diametres ont entr'eux une même raiſon, les rayons étant la moitié des diametres.



Theorême quatriéme.

Les circonferences de deux cercles

ſont entr'elles comme les diametres de ces cercles.

Par le Cor. du Th. 9, § 4 l. 2, les cercles peuvent être conſiderez comme des Polygones reguliers: or les circuits de deux Polygones ſont entr'eux comme leurs diametres : donc les circuits ou circonferences des cercles ſont entr'elles comme les diametres des cercles.

Scholie.

Si on conçoit dans un cercle une infinité d'autres cercles concentriques, dont les circonferences ſoient deployées & dreſſées comme des lignes droites, le rayon du grand cercle & ſon circuit feront un triangle rectangle dans l'hipothenuſe, duquel les extre-

mitez des cercles concentriques auſſi déployés, doivent ſe trouver, puis qu'ils ſont entr'eux comme les parties du rayon du cercle qu'ils coupent. C'eſt pourquoy l'on a conclu de là que la ſurface du cercle étoit égale à un tel triangle. Ce que nous avons démontré par une autre voye ſur la fin du ſecond Livre.

Theoréme cinquiéme.

Les arcs d'égale quantité de degrez dans differens cercles ſont entr'eux comme les cercles dont ils ſont les parties.

Cela eſt clair : les degrez ſont les parties proportionneles d'un tout : donc elles ſont entr'elles comme les touts, dont elles ſont les parties.

Theorême ſixiéme.

Les cordes d'arcs ſemblables dans differens cercles ſont entr'elles comme les arcs dont elles ſont les cordes.

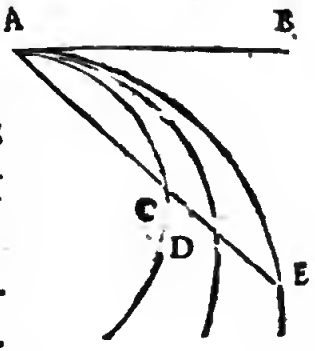
Concevant que du centre des cercles où ſont ces cordes on ait mené des lignes à leurs extremitez, on aura des triangles ſemblables, puiſque ces cordes d'arcs ſemblables ont les angles au centre égaux, ainſi étant Iſoſceles, ils ont tous leurs angles égaux : ces cordes ſont donc entr'elles comme les rayons de ces cercles ; & partant comme ces cercles : or les arcs d'égale quantité de degrez ſont entr'eux comme les cercles dont ils ſont parties, par le Theor. precedant, ces cordes ſont donc entr'elles comme les arcs dont elles ſont les cordes.

Theorême ſeptiéme.

Si du point A où pluſieurs cercles ſe touchent, on mene une ligne comme A E qui coupe ces cercles, les parties de cette ligne ſeront entr'elles comme les cercles qu'elle coupe.

Par A je mene AB qui touche ces cercles ; ainſi l'angle BAE par le Th. 11, § 1, l. 2 a pour meſure ou l'arc AC, ou AD, ou AE, ainſi ces trois arcs ſont ſemblables.

Les cordes AC, AD, AE, par le Theor. precedant, d'arcs ſemblables, ſont entr'elles comme les arcs AC, AD, AE, & par le Th. 5, puiſque ces arcs ſont entr'eux comme leurs cercles, les parties de ladite ligne ſeront entr'elles comme les cercles qu'elle coupe.



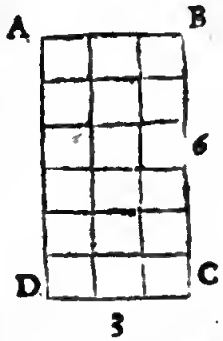
SECTION III.

Des raiſons & proportions des ſurfaces.

Demande.

LEs ſurfaces ſont des grandeurs faites par la multiplication de leurs deux dimenſions, ou de leurs côtez.

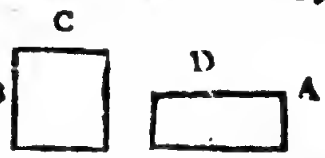
Les deux dimenſions de la ſurface ABCD, qui ſont ſes deux côtez BC & CD, multipliées l'une par l'autre, font la grandeur de cette ſurface : que BC ſoit de ſix pieds & GD de trois, ABCD ſera de dix-huit.



Theoréme premier.

Si quatre lignes ABCD ſont proportionnelles A, B, : : C, D, le rectangle des extrêmes AD eſt égal à celuy des moyens BC.

Ces quatre lignes ſont quatre grandeurs. Faire un rectangle de deux lignes, c'eſt la même choſe que de les multiplier l'une par l'autre, ſelon le Lemme precedant : donc ce Theorême eſt le même que la propoſition 21 du l. 3, *Grandeur.*



Corollaire.

Ayant donc le côté A d'un rectangle, pour trouver quel doit être l'autre, afin qu'il ſoit égal au rectangle BC, conſiderant A, B, C, comme trois lignes proportionnelles, il faut leur chercher une quatriéme proportionnelle, qui ſera le côté qui avec A fera un rectangle égal à B C.

Theorême deuxiéme.

Si de quatre lignes les extrêmes font un rectangle égal à celuy des moyens, ces lignes ſont proportionnelles.

Ce Theorême par ce que nous venons de dire eſt le même que la 22ᵉ prop. du l. 3. *Grandeur.*

Corollaire.

Les complemens d'un paralelogramme étant égaux par le Theor. 3. § 4, l. 2 les lignes qui les comprennent ſont proportionnelles : cela ſe peut encore démontrer, parce que ces lignes font les mêmes angles entre les paralelles,

qui les comprennent.

Theoréme troiſiéme.

Si ∴ A, B, C, le rectangle AC de la 1re & 3e eſt égal à BB quarré de la moyenne.

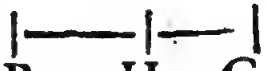
Cette propoſition eſt la même que le Coroll. de la 21e propoſition du l. 3 *Gr*,

Corollaire premier.

Donc pour trouver un quarré égal à un rectangle donné, il faut trouver ſeulement une ligne moyenne proportionnelle entre les deux côtez du rectangle : ce qui eſt enſeigné Prob. 4, § 1. l. 3. *ſup.*

Corollaire ſecond.

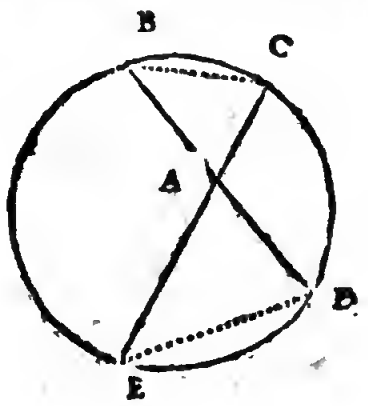
Donc lors qu'une ligne comme B C eſt coupée en moyenne & extrême raiſon au point H, le rectangle de la toute B C & de la petite partie HC eſt égal au quarré de la mediane B H, puiſque ∴ BC, BH, HC par le Prob. 6, § 1. *ſup.*



Scholie.

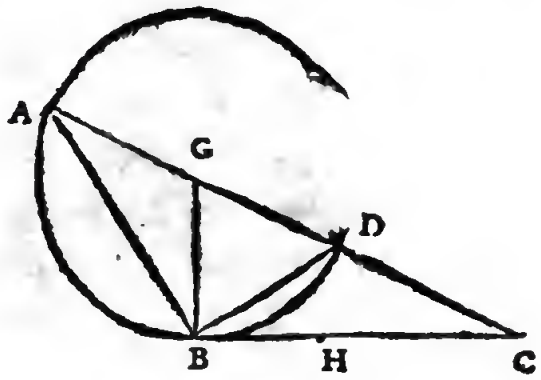
Nous pourrions icy ajoûter pluſieurs Theorêmes qui ne ſont que des Corollaires de ce qu'on vient de démontrer : car de ce que dans une proportion le rectangle des extrêmes eſt égal au rectangle des moyens, il s'enſuit par exemple,

1. Lors que deux cordes BD & C E dans un cercle ſe coupent l'une l'autre, le rectangle des deux parties de l'une eſt égal au rectangle des parties de l'autre, car par le Th. 8, § 1 *ſup.* BA, AE :: AC

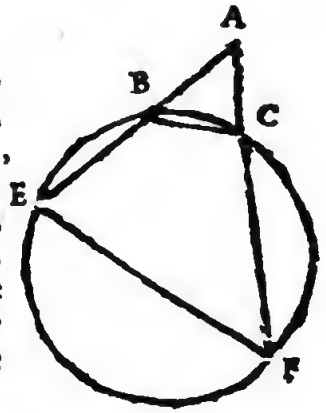


A D : donc par le Th. 1' *ſup.* le rectangle de BA & de AD eſt égal au rectangle de AE & de AC.

2. Si du point C, hors d'un cercle on mene deux lignes droites C B & CA, dont l'une touche le cercle, & l'autre le coupe, le rectangle de AC & de CD eſt égal au quarré de la tangente BC: car, par le Th. 9, §. 1 ∴ AC, BC, DC : donc par le Th 3. ſup. le quarré de la tangente B C eſt égal au rectangle de AC & de DC.

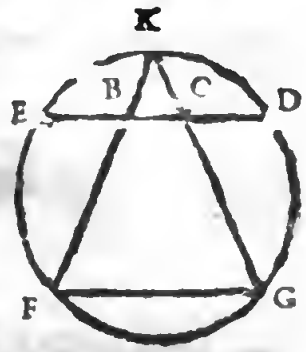


3. Si du point A hors un cercle on mene deux lignes droites AE & A F, qui le coupent, le rectangle de l'une AE, & de la partie A B eſt égal au rectangle de l'autre AF, & de la partie A C, car par la Scholie du Theorême 10 §*ſup.* ſi AE. AF : : A C. A B : donc par le Theorême premier *ſup.* le rectangle de A E, & de AB eſt égal au rectangle de AF & de A C.



4. Si par les points D & E également éloignez de K l'on mene la ligne D E, le rectangle de K F & de k B eſt égal au rectangle de K F & de K G ; car par la même Scholie kF, kG : : k C, k B, ainſi par le Theorême premier *ſup.* le rectangle de kF & de kB eſt égal au rectangle de KG & de KC.

Ces exemples doivent ſuffire pour montrer qu'on peut tirer pluſieurs propoſitions de ce qui vient d'être prouvé

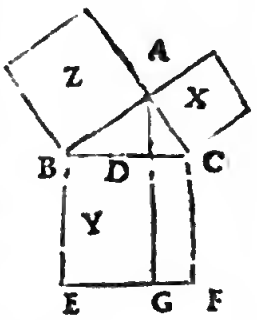


Theoréme quatriéme.

Dans un triangle rectangle le quarré de l'hipothenuſe eſt égal aux quarrez des deux autres côtez.

A B C eſt un triangle rectangle, ſur les

côtez duquel ſont les trois quarrez Z. X. Y : de l'angle droit A je mene ſur BC une perpendiculaire que je prolonge de ſorte qu'elle coupe BC en deux parties, en D & fait deux triangles rectangles ſemblables par le Lem. 4, § 1 *ſup.*



Par le Th. 7, § 1 *ſup.* AC eſt moyenne proportionnelle entre BC, ou CF, ſon égale & DC : donc par le Th. 3 *ſup.* le quarré X eſt égal au rectangle CDGF, & par le même Th. 7, § 1. *ſup.* AB étant moyen proportionnel entre BC ou ſon égale BE & BD, le quarré Z eſt égal au rectangle BDGE : ces deux rectangles ſont les parties de Y ; donc le quarré de Y eſt égal à ceux de Z & de X ; ce que nous avons démontré d'une autre maniere, Liv. 2, § 4, Th. 5.

Corollaire.

Donc pour trouver un quarré comme Y égal aux deux quarrez donnez Z & X, il faut joindre les côtez de Z & de X de ſorte qu'ils faſſent un angle droit, dont l'hipothenuſe ſera le côté du quarré que l'on cherche.

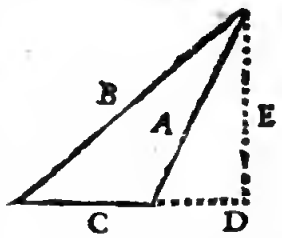
Theorême cinquiéme.

Le triangle ABC eſt ambligone : du ſommet je mene la perpendiculaire E ſur le côté C prolongé autant qu'il eſt neceſ-

ſaire. Je dis que le quarré de B qui ſoûtient l'angle obtus eſt égal au quarré de C & de A, plus à deux fois le rectangle de C & de la partie D compriſe entre C & la perpendiculaire E.

Il faut donc démontrer que BB = CC + AA + 2 CD. par la prop. 7. l. 2 *Grand.*

Le quarré de C + D eſt CD + 2CD + DD, par la propoſition precedante BB = CC + 2CD + DD + EE, puis qu'il eſt égal au quarré de E & de C + D : par la même propoſition AA = EE + DD: ainſi au lieu de EE + DD mettant AA une valeur égale, nous aurons BB = CC + AA + 2CD ce qu'il faloit démontrer.



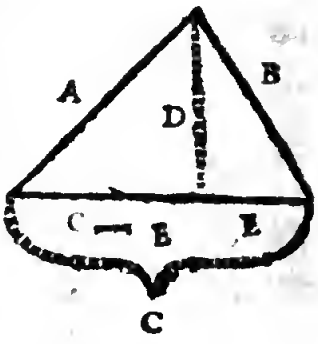
Theorême ſixiéme.

Dans un triangle oxigone le quarré de A qui ſoûtient l'angle aigu, eſt égal au quarré des deux autres côtez B & C, moins deux fois le rectangle fait de C & de E partie de C que la perpendiculaire D coupe en deux, ainſi l'autre partie de toute la ligne C ſe peut nommer C − E.

Il faut démontrer que AA = BB + CC − 2CE.

Par le Theor. 4 *ſup.* le quarré de A eſt égal aux quarrez de D & de C − E, celuy

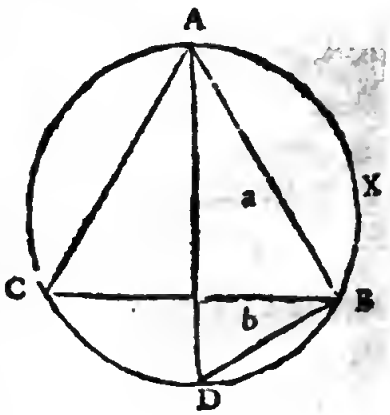
de — E eſt C C — 2CE + EEC ainſi AA = DD + CC — 2CE + EE, & par le même Th. BB = DD + EE, plaçant donc BB au lieu de DD + EE dans l'equation precedente, nous aurons A A = BB + C C — 2 C E ; ce qu'il faloit démontrer.



Theorême ſeptiéme.

Dans le triangle equilateral ABC inſcrit dans le cercle X, le quarré de AB eſt triple de celuy du rayon.

Je coupe B C en deux parties égales par la perpendiculaire AD, qui ſera ainſi le diametre du cercle & paſſe par le centre : ainſi BD ſera égal à DC, & comme B C eſt la corde du tiers du cercle, BD ſera la corde de la 6e partie du cercle, & partant égale au rayon, par le Probl. 6, §. 3, l. 2.



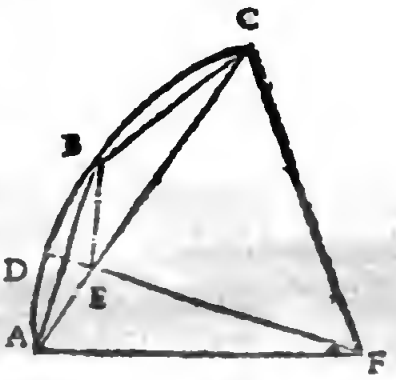
Le quarré de AD diametre, qui eſt double du rayon BD, eſt quadruple du quarré de BD, que je nomme b, ainſi le quarré de AD eſt 4bb. J'appelle aa celuy de AB: par le Th. 4 *ſup.* aa + bb eſt égal au quarré AD, qui eſt 4bb : ainſi aa + bb =

4bb : ôtant bb de part & d'autre, il reſtera aa= 3bb : ce qu'il faloit démontrer.

Theorême huitiéme.

Le quarré d'un des côtez d'un pentagone eſt égal aux quarrez d'un des côtez du decagone & de l'exagone inſcrits dans le même cercle.

A C eſt le côté d'un pentagone, par conſequent AB & BC moitiés de l'arc ABC, ſont les côtez du decagone. A F & CF ſont les rayons du cercle, & par conſequent côtez de l'exagone: l'arc A B eſt coupé en D, par la moitié, d'où DF a éte menée au centre.



L'angle AFC qui eſt celuy du centre du pentagone eſt de 72 degrez, ainſi les angles ACF, & FAC ſont chacun de 54, l'angle EFC ayant pour ſa meſure BC de 36, & DB de 18, moitié de AB 36 eſt auſſi de 54 degrez, & partant égal à FCA & CAF, ainſi les deux triangles AFC & ECF, outre cet angle en ayant un autre qui leur eſt commun au point C, ils ſont equiangles : donc AC eſt à A F, comme FC, ou ſon égale AF eſt à EC, ainſi ∴AC, AF, EC : donc le rectangle

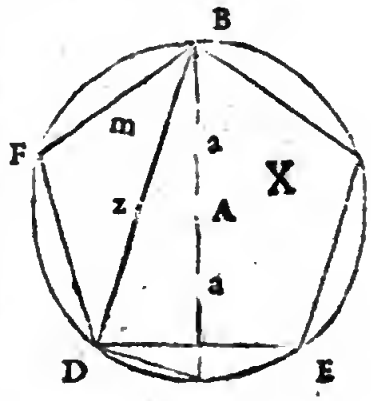
ſoit de AC & de EC eſt égal au quarré fait de AF.

Puiſque DF eſt perpendiculaire ſur AB, donc AE = EB, donc le triangle AEB eſt Iſoſcele. Il a un angle commun avec l'Iſoſcele ABC : donc par le Corol. 2 du Th. 7 § 2, l. 2, ces deux triangles ſont ſemblables : donc comme AE à AB, ainſi AB à AC, ainſi ∴ AE, AB, AC : donc le rectangle fait de A E & de AC eſt égal au quarré de AB.

Or le quarré de AC eſt égal aux deux rectangles AC,EC & AC,AE : par la pr. 2, l. 2, *Gr.* donc le ſeul quarré AC, côté du pentagone eſt égal aux deux quarrez de AB & AF, côtez du decagone & exagone, ce qu'il faloit démontrer.

Corollaire.

Un pentagone eſt inſcrit dans le cercle X. Je dis que le quarré du côté du pentagone BF, plus le quarré de la corde BD qui ſoûtient l'angle BFD vaut cinq fois le quarré du rayon AC.



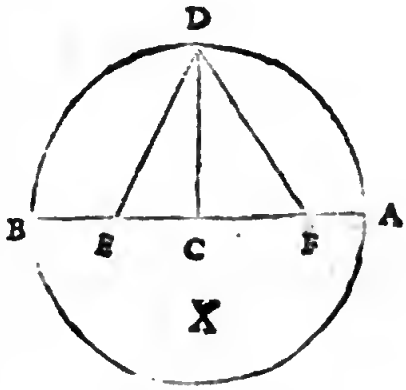
Car menant le diametre BC qui coupe le côté du pentagone DE & l'arc DCE par la moitié, la corde DC eſt le côté du decagone : ſoit maintenant FB = m, BD = z, DC = X, AC = a, BC = 2 a, & parce que B C eſt l'hipothenuſe du triangle rectangle BDC, il s'enſuit que z z + x x = 4 a a par le Theor. 4 *ſup.* & ajoûtant de part & d'autre le quarré de AC, qui eſt a a, vient zz + xx + a a = 5 aa. Or par le precedant Th. le quarré du côté du deca-

gone, plus le quarré du côté de l'exagone ſont égaux au quarré du côté du pentagone, c'eſt à dire x x + a a = m m : donc au lieu de xx + aa ſubſtituant la grandeur égale mm, on aura zz + mm = 5aa, c'eſt à dire que le quarré de BF, plus celuy de BD eſt égal à cinq fois le quarré du rayon de X, ce qu'il faloit prouver.

Probléme premier:

Un cercle étant donné trouver le côté du pentagone & du decagone d'une autre maniere que celle qui a eſté enſeignée.

Le cercle donné eſt X, le diametre AB, le centre C, & CD une perpendiculaire. CE eſt la moitié de CB, il faut prendre EF = ED : en ſuite menant de D à F la ligne DF, on aura le côté du pentagone que l'on cherche.

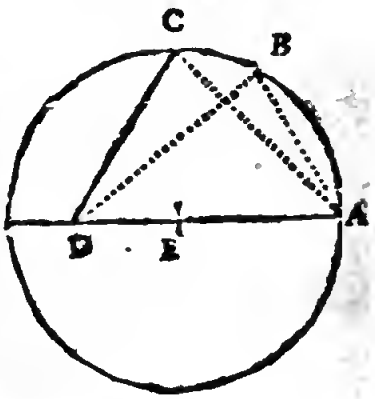


Par la propoſ. 13 l. 2 *Gr.* le plan de BF par FC plus le quarré de EC eſt égal au quarré de FE, lequel par la conſtruction eſt le même que ED : or le quarré de ED eſt égal à celuy de EC & de DC : donc le plan de BF par FC eſt égal au quarré de DC ou de BC : partant par le Th. 2, § 3 *ſup.* BF, BC : : BC, FC ; donc FB eſt coupée en moyenne & extrême raiſon ; & puiſque BC ou CD eſt le côté de l'exagone. FC ſera celuy du decagone, par le Th. 13, § 1 *ſup.* or le quarré de

FD eſt égal à celuy de FC & de DC ou CB : donc par le Theo. precedant FD eſt le côté du pentagone : ainſi on a fait ce qui eſtoit propoſé.

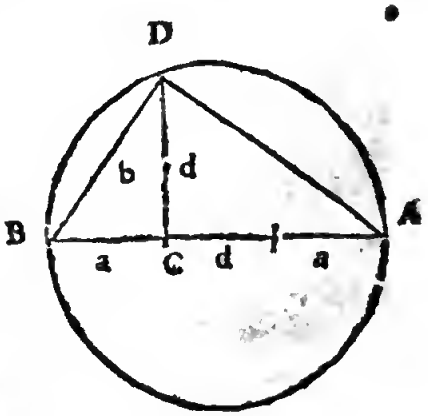
Scholie.

Cette operation s'abrege de cette maniere ; on prend AB égale au rayon du cercle, & AC égale à la corde de nonante ou au côté du quarré inſcrit dans le cercle, & BD égale à AC: la ligne CD ſera le côté du pentagone, & EA eſtant le rayon du cercle, DE ſera le côté du decagone. I'en reſerve à un autre lieu la démonſtration.



Theorême neufiéme.

Le diametre AB eſt coupé en C, de ſorte que AC eſt double de BC, la ligne CD eſt perpendiculaire ſur le point C, je dis que le quarré de BD eſt triple du quarré de chacune des trois parties de AB, & celuy de CD double de chacune de ces mêmes parties.



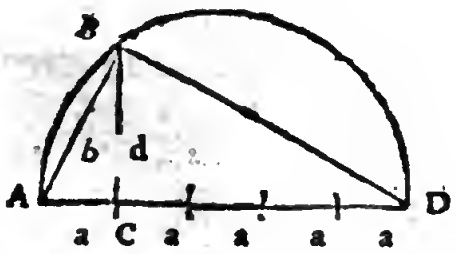
Soit chacune des trois parties de AB = a & DB = b. 1° Par le Th. 7 § 1 *ſup.* a + a + a, c'eſt à dire 3a, b : : b, a ; donc par le Th. 3 *ſup.* bb 3aa. 2° La perpendiculaire DC ou d eſt moyen entre AC & CB :: 2a, d, a : : donc 2aa = dd ; ce qu'il faloit démon trer.

Theoréme

Theorême dixième.

Le diametre AD eſt coupé en C, de ſorte que CD eſt quadruple de AC, la ligne BC eſt perpendiculaire ſur AD. Je dis que le quarré de AB eſt quintuple de celuy de AC, dont celuy de BC eſt quadruple.

Ce Theor. ſe démontre de la même maniere que le precedant: car 1° ſoit AC appellé a & AB, b, par le Th. 7, § 1, *ſup.* ∴ 5a, b, a; donc par le Th. 3, § *ſup.* bb = 5aa. 2° BC eſt moyen entre AC & CD : donc ∴ a, d, 4a, & partant 4aa = dd : ce qu'il faloit démontrer.



Corollaire.

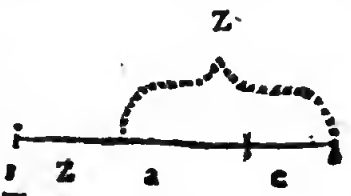
De ce dernier Theorême & du precedant, on peut conclure en general qu'ayant partagé le diametre AD en tant de parties égales, le quarré de AB ſera égal à autant de fois celuy de chacune de ces parties qu'il y a de parties ; car ſi AB eſt diviſé en ſix parties, dont chacune eſt a, puiſque AD = 6a, & que ∴ 6a, AB, a, & que le produit des extrêmes eſt égal à celuy des moyens, le quarré de AB vaudra 6aa, c'eſt à dire, ſix fois le quarré de la ſixiéme partie de AD.

On peut auſſi conclurre en general que le quarré de BC ſera égal a autant de fois le quarré de chacune de ces parties qu'il y a de parties, moins une ; ∴ 5 a, BC, a donc le quarré de BC ſera égal à 5 aa.

On peut trouver de la même maniere la raiſon du quarré de AD avec le quarré de chacune des parties de AB.

Theorême onziéme.

Z eſt une ligne coupée en moyenne & extrême raiſon, je dis que le quarré de la plus grande partie a, avec la moitié de z, lequel quarré eſt $aa + \frac{1}{2}ZZ + Za$, eſt cinq fois plus grand que le quarré de la moitié de Z qui eſt $\frac{1}{4}zz$.



Le quadruple de $\frac{1}{4}ZZ$ eſt ZZ ; ainſi le quintuple de $\frac{1}{4}ZZ$ eſt $ZZ + \frac{1}{4}ZZ$: il faut donc démontrer que $ZZ + \frac{1}{4}ZZ = aa + \frac{1}{2}ZZ + Za$: ôtant de part & d'autre $\frac{1}{4}ZZ$ reſte à démontrer que $ZZ = aa + Za$.

$Ze + Za = ZZ$ par la 4e propoſ. l. 2, *Gr.* & $Ze = aa$ par le Th. 3, § 3 *ſup.* puiſque par la ſuppoſition ∴ Z, a, e : donc dans l'equation $ze + Za = zz$, au lieu de Ze ſubſtituant aa une valeur égale, on a cette equation $aa + Za = Zz$; ce qui reſtoit à prouver pour démontrer le preced. Th.

Scholie.

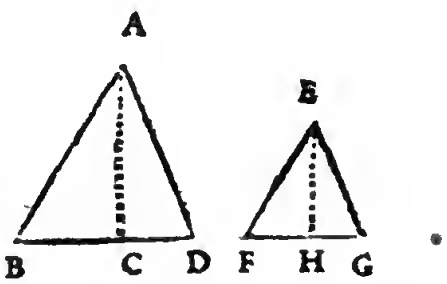
I'obmets pluſieurs Theorêmes ſemblables qui ſeront faciles à ceux qui auront compris les precedans.

Theorême douziéme.

Deux triangles ſemblables ſont en raiſon compoſée de celles de deux de leurs

côtez omologues, & cette raiſon eſt doublée.

Soient ABD & EFG deux triangles ſemblables, par le Th. 4, § 4, l. 2, ABD eſt égal à un Parallelogramme fait de AC, & de la moitié de ſa baſe BD, & EFG a un Parallelogramme fait de EH & de la moitié de FG : donc par la Dem. cy-deſſus on peut conſiderer ces deux triãgles ABD cõme faits par la multiplication de AC, par la moitié de BD & EFG, de EH ; par la moitié FG : donc par la propoſ. 4, l. 4, *Gr.* la raiſon de ces deux triangles eſt compoſée de celle de AC à EH, & de la moitié de BD à la moitié de FG : or par le Theor. 3e § 1 *ſup.* AC, EH :: AB, EF :: BD, FG : donc on peut dire que la raiſon de ABD à EFG eſt compoſée des raiſons de AB à EF, & de BD à FG : or ces deux raiſons ſont égales ; donc par la def. de la raiſon doublée, la raiſon qu'elles compoſent eſt doublée.



Theorême treiziéme.

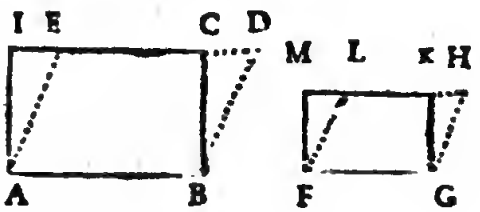
Deux triangles qui ont leur baſe ou leur hauteur égale, ſont entr'eux comme l'inégale.

Car la ſurface de deux triangles dépend de leur hauteur & de leur baſe, par conſequent cette propoſition eſt la méme que la 6e du l. 4 *Gr.*

Theoréme quatorziéme.

Les Parallelogrammes ſemblables ſont en raiſon compoſée de celle de leurs côtez, & cette raiſon eſt doublée.

Par la Deman. cy-deſſus les Parallelogrãmes rectangles ABCI & FKGM ſont faits par la multiplication de leurs côtez l'un de AB, par BC, l'autre de FG par GK, donc par la prop. 4, L. 4 *Grand.* la raiſon de A B C à F G K eſt compoſée de celles de AB à FG, & de BC à GK. or ABCI = ABDE & FGKM = FGHL par le Th. 2, § 4, liv. 2.; ainſi la raiſon de ABDE avec FGHL eſt compoſée de celle de AB avec FG, & de celle de B C avec G K : or la raiſon de BD à GH eſt la même que celle BC à GK ; donc puiſque les raiſons compoſées de raiſons égales, ſont égales, on peut dire que la raiſon de ABDE avec FGHL eſt cõpoſée de celles de leurs côtez, ſçavoir de AB avec FG, & de BD avec GH ; & puiſque ces deux raiſons ſont égales, celle qu'elles compoſent eſt doublée, par la definition des raiſons doublées.



Theoréme quinziéme.

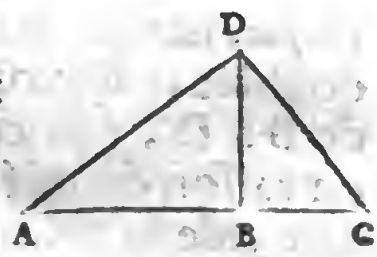
Les Parallelogrammes rectangles qui ont un de leurs côtez égaux, ſont entre eux comme les côtez inégaux.

Puiſque par la Deman. *ſup.* ces Parallelogrammes peuvent être conçûs comme faits par la multiplication de leurs côtez : par la 4e propoſition du 4 livre *Gr.* ils ſont en raiſon compoſée des raiſons de leurs côtez, & ayant un de leurs côtez égal, ils ſont entr'eux comme les inégaux, par la 6 du même Livre 4, *G.* c'eſt ce qu'il faloit prouver.

Theoréme ſeiziéme.

Dans le triangle rectangle ADC, la ligne BD eſt perpendiculaire ſur l'hipothenuſe AC, : je dis que les quarrez ſur ſes trois côtez ſont entr'eux comme AC. AB. BC.

Par le Th. 7, § 1, ∴ AC, AD, AB: donc le rectangle de AC par AB eſt égal au quarré ſur AD ; par le Th. 3, § 3, & par la même raiſon, puiſque ∴ A C, D C, B C, le quarré ſur D C eſt égal au rectangle fait de AC par B C, mais le rectangle de A C par A C eſt égal au quarré fait ſur AC, ces trois quarrez ſeront dõc entr'eux cõme



ces trois rectangles, auſquels ils ſont égaux. Or ces trois rectangles ont tous pour un de leurs côtez la ligne AC, ils ſeront donc entr'eux comme leurs autres côtez qui ſont AC, AB, BC, par le Th. 15, ainſi le quarré ſur AD & à celuy ſur CD comme AB eſt à BC, & à celuy ſur AC comme AB eſt à AC ; ce qu'il faloit prouver.

Theoréme dix ſeptiéme.

Les Polygones reguliers & ſemblables ſont en raiſon doublée de celle des diametres des cercles où ils ſont inſcris.

Soient X & Z deux Polygones ſemblables, A eſt le rayon de X, & B ſon circuit. X eſt égal à un triangle rectangle, dont A eſt la hauteur & B la baſe, & Z à un rectangle dont C la hauteur & D la baſe par le Th. 7, § 4. l. 2 : ces deux triangles ſont ſemblables, car par le Th. 3, § 2 *ſup*, les circonferences des Polygones ſemblables ſont comme les rayons des cercles où ils ſont inſcrits, partant A, B, :: C, D, donc par le Th. 12 *ſup.* ces deux triangles ſont en raiſon doublée, ſçavoir de celle de A à C ou de B à D, par conſequent X & Z ſont en raiſon doublée de celle A à C, c'eſt à dire, de la raiſon de leurs rayons, qui eſtant la même que celle de leurs diametres, X & Z ſont en raiſon doublée de

celle qu'ont leurs diametres; ce qu'il faloit démontrer.

Corollaire.

Donc puiſque les cercles peuvent être pris pour des Polygones, ils ſont auſſi entr'eux en raiſon doublée de celle de leurs diametres.

Theorème dix-huitiéme.

Les Polygones reguliers & ſemblables ſont entr'eux comme les quarrez des diametres des cercles où ils ſont inſcrits.

La raiſon de X à Z eſt doublée de celle des diametres des cercles où ils ſont inſcrits, par le Theor. precedant : or les quarrez, dont ces diametres ſont les côtez ou les racines, ſont auſſi en raiſon doublée de la raiſon de ces diametres par le Cor. de la 7 Propoſition l. 4 *Gr.* donc X eſt à Z, comme les quarrez des diametres des cercles où ils ſont inſcrits; ce qu'il faloit prouver.

Corollaire.

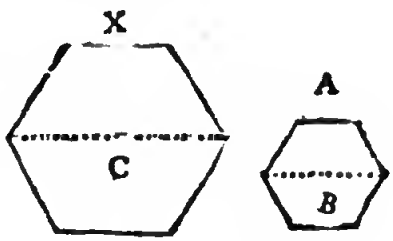
Donc puiſque les cercles peuvent être pris pour des Polygones, leurs ſurfaces ſont entr'elles comme les quarrez de leurs diametres.

Problême troiſiéme.

A une figure donnée, en trouver une autre ſemblable, en raiſon donnée.

Soit A une figure dont le diametre eſt B, on cherche X une figure qui luy ſoit

ſemblable, & dont la ſurface ſoit quintuple de A : ces figures ſont par le Th. precedant comme les quarrez de leurs diametres : il ne s'agit donc que de trouver un diametre dont le quarré ſoit quintuple du quarré de B; Pour cela il faut trouver par le Probl. 4 § 1, *ſup.* une ligne moyenne proportionnelle entre le diametre B & une ligne cinq fois plus grande que je nomme D: ſuppoſant la choſe faite, & que cette ligne moyenne que l'on cherche ſoit C; de ſorte que ∴ B, C, D. par la 11ᵉ l. 4 *Grand.* le quarré de B eſt à celuy de C, comme B eſt à D : or D eſt quintuple de B : donc le quarré de C eſt quintuple de celuy de B, ainſi on a trouvé ce que l'on cherchoit.



SECTION IV.

De la commenſurabilité, ou incommenſurabilité des lignes & des ſurfaces.

AVERTISSEMENT.

Cette Section ſuppoſe qu'on a vû le 6 livre de la Grandeur. Si on ne l'a pas lû, on peut paſſer cette Section, & tout ce qui ſe dira dans le Livre ſuivant de l'incommenſurabilité.

Definitions.

Premiere definition.

LES grandeurs ſont dites commenſurables lors qu'elles peuvent être meſurées par une troiſiéme, qui eſt ainſi leur commune meſure.

Scholie.

La commune meſure d'une toiſe & d'un pied, c'eſt le poulce qui ſe trouve exactement 12 fois dans un pied, & 72 fois dans une toiſe.

Seconde definition.

Les grandeurs incommenſurables ſont celles qui ne peuvent être meſurées par une commune meſure.

Scholie.

C'eſt à dire qu'on ne peut trouver aucune meſure qui ſoit contenuë exactement tant de fois dans l'une & tant de fois dans l'autre.

Troiſième definition.

L'on appelle rationnelle une grandeur connuë & determinée, dont la valeur ſe peut exprimer par nombre.

Scholie.

Grandeur rationnelle eſt celle à laquelle on rapporte toutes les autres& ſur laquelle on raiſonne,ainſi on la ſuppoſe connuë.

Demande ou Axiome.

Deux nombres ſont toujours commenſurables entr'eux ; car ils ont au moins l'unité,pour leur commune meſure, qui ſe trouve preciſement tant de fois dans chacune.

Seconde Demande ou Axiome.

Lors que d'un nombre on en retranche un autre, le reſte eſt un nombre.

Troiſiéme Demande ou Axiome.

Les lignes & les ſurfaces qui ſont comme nombre à nombre, ſont commenſurables, & celles qui ſont incommenſurables ne ſont pas comme nombre à nombre.

Theorême premier.

Deux grandeurs commenſurables à une troiſiéme ſont commenſurables entr'elles.

B eſt commenſurable avec C, & D avec C, ainſi par la troiſiéme demande *ſup.* B eſt à C comme nombre à nombre, & C avec D comme nombre à nombre: on peut donc exprimer le rapport de ces trois grandeurs par des nombres; ainſi elles ſont commenſurables,

Theorême ſecond.

La ligne ſur laquelle eſt fait un quarré qui n'eſt pas égal à un nombre quarré n'eſt pas rationnelle; & ſi ſon quarré eſt égal à un nombre quarré, elle eſt rationnelle.

Soit X cette ligne dont XX eſt le quarré, je dis que X ne peut être rationnelle, c'eſt à dire, égale a un nombre; car X racine de XX ſera égale à la gran-

deur, qui eſt la racine du nombre auquel X X eſt égal : or par la prop. 14 l. 6 *Grandeur*, un nombre non quarré ne peut avoir pour racine un nombre : ainſi X égale à cette raiſon ne peut être égale à un nombre, & par conſequent elle n'eſt pas rationnelle.

Que ſi XX eſt égal à un nombre quarré bb ſa racine X ſera égale à b : or b eſt un nombre, donc X ſe peut exprimer par un nombre.

Theorême troiſiéme.

Si les quarrez de deux lignes ne ſont pas entr'eux comme deux nombres quarrez, ces deux lignes ne ſont pas commenſurables.

Soient Z & X ; ſi ZZ n'eſt pas à X X comme deux nombres quarrez, je dis que Z & X ne ſont pas commenſurables, car ſi Z eſtoit à X comme deux nombres : les quarrez de Z & de X ſeroient entr'eux comme les quarrez de ces deux nombres : par exemple, ſi on dit que Z eſt à X comme 2 a 3 : donc ZZ, XX :: 4, 9; ainſi leurs quarrez ſont entr'eux comme nombres quarrés: ce qui eſt contre l'hipotheſe.

Theorême quatriéme.

Un quarré rationnel, ou qui ſe peut exprimer par nombre ne peut être égal

à deux quarrez, dont l'un eſt rationnel & l'autre ne l'eſt pas.

Soit aa= 30, je dis qu' aa ne peut être égal à deux autre quarrez dont l'un ſoit rationnel, & l'autre ne le ſoit pas ; car ayant ôté de a a l'un qui eſt rationnel, par exemple, ayant ôté 25 de 30, par l'Axiome 2 *ſup.* le reſte eſt un nombre, qui par conſequent eſt une grandeur rationnelle, ce qui eſt contre l'hipotheſe. Ainſi un quarré rationnel, &c.

Theorême cinquiéme.

Une ligne commenſurable eſtant diviſée en deux parties, ſi l'une eſt commenſurable, l'autre le ſera auſſi.

Car ayant ôté la partie commenſurable, puiſque le tout luy eſt commenſurable, & que par conſequent il s'exprime par nombre, le reſte ſera un nombre, par le 2 Axiome *ſup.* ainſi ce reſte ou cette partie eſt commenſurable par le troiſiéme Axiome.

Theorême ſixiéme.

Si à une ligne commenſurable on ajoûte une grandeur commenſurable, le tout ſera commenſurable.

Cela eſt clair, car ces deux grandeurs par le 3 Axiome ſont comme deux nombres : or un nombre ajoûté à un nom-

bre fait un nombre, ainſi une grandeur commenſurable ajoûtée à une commenſurable, fait un tout commenſurable.

Theoréme ſeptiéme.

Si d'une ligne commenſurable on retranche une grandeur incommenſurable, le reſte eſt incommenſurable.

Pour retrancher une partie il faut couper le tout : or par le Th. 5 *ſup.* une grandeur commenſurable eſtant diviſée en deux parties, ſi l'une eſt commenſurable, l'autre l'eſt auſſi: ainſi ſi de ces deux parties l'une eſt incommenſurable, l'autre l'eſt auſſi ; puiſque ſi celle-cy eſtoit commenſurable par le Th. 5, la premiere ſeroit auſſi commenſurable.

Scholie.

Ie travaille à eſtre court & à ne rien dire que d'utile. C'eſt pourquoy je ne propoſeray point pluſieurs choſes qui ſe trouvent dans le 10 l. d'Euclide, que je pourrois démontrer plus clairement que ſes Interpretes ordinaires, de la maniere que nous avons fait les propoſitions precedantes, dont les demonſtrations ſont une clef pour trouver la demonſtration de pluſieurs autres propoſitions.

Lors que l'on joint enſemble les grandeurs qui ne ſont pas commenſurables, & à qui par conſequent on ne peut pas donner le même nom, ou que l'on eſt obligé d'exprimer par deux noms differens, cela s'appelle, comme nous avons dit l. 6 Gr. un Binome.

Ce que nous venons de démontrer des grandeurs qu'on compoſe ou qu'on ajoûte enſemble, s'applique aiſément à la diviſion ou ſeparation qu'on fait de deux grandeurs, lors que d'une grandeur l'on en retranche une autre qui luy eſt incommenſurable, & qu'ainſi l'on ne les peut exprimer avec un ſeul ſigne: c'eſt bien un Binome, mais pour diſtinction on appelle cela Apotome, reſidu, ou grandeurs diminuées.

Nous avons traitté cette matiere avec autant d'exactitude qu'il eſtoit neceſſaire de le faire dans le 6 l. Grandeur.

Theorême huitiéme.

Quatre grandeurs eſtant proportionnelles, ſi la premiere eſt commenſurable à la ſeconde, la troiſiéme le ſera à la quatriéme. Si la premiere eſt incommenſurable avec la ſeconde, la troiſiéme ſera incommenſurable avec la quatriéme.

Si la raiſon de la premiere à la ſeconde ſe peut exprimer par nombres; celle de la ſeconde, à la troiſiéme, qui eſt la même, s'exprimera par nombres; ainſi ſelon le troiſiéme Axiome *ſup.* ces grandeurs ſeront commenſurables.

Si la raiſon de la premiere à la ſeconde eſt ſourde, celle de la troiſiéme à la quatriéme, qui eſt la même, ſera auſſi ſourde; ainſi par le même Axiome elles ſont incommenſurables.

Scholie.

Cette demonſtration donne jour pour démontrer pluſieurs autres propoſitions ſemblables, mais peu utiles.

Theoréme neufiéme.

Les quarrez décrits ſur des lignes commenſurables entr'elles, ſont commenſurables entr'eux.

Les quarrez ſont en raiſon doublée de leurs côtez ou de la ligne ſur laquelle ils

ſont décrits par le Th. 14, § 3 *ſup.* ſelon l'hipotheſe ces lignes ſont comme nombre à nombre étant commenſurables. Or par la 8 Prop. l. *Grand.* la raiſon doublée d'une raiſon de nombre à nombre eſt auſſi une raiſon de nombre à nombre, par conſequent les quarrez eſtant comme nombre à nombre, ils ſont commenſurables,

Theorême dixième.

Si quatre lignes proportionnelles ſont commenſurables, le rectangle fait des antecedans, eſt commenſurable à celuy qui eſt fait des conſequans.

Cette propoſition eſt la même que la ſeconde du l 6 *Grandeur.*

Theorême onzième.

Si trois lignes ſont proportionnelles, & que la premiere ſoit à la troiſiéme comme un nombre quarré, ces trois lignes ſeront commenſurables.

Voyez le premier cas de la Propoſition 10, l. Gr. où cela eſt demontré.

Corollaire.

Donc en ce cas le rectangle des extrêmes ſera commenſurable avec le quarré de la moyenne.

Car par l'hipotheſe B C :: C D, & ces quatre lignes ſont commenſurables, comme on le vient de prouver, donc par le Th. precedant BD ſera commenſurable avec CC.

Theorême douzième.

Si trois lignes B, C, D, ſont propor-

tionnelles, & que la premiere ſoit à la troiſiéme, comme deux nombres qui ne ſont pas quarrez, la moyenne ſera incommenſurable en elle-même, & commenſurable en puiſſance avec la premiere & la troiſiéme.

Voyez le ſecond cas de la Prop. 10 l. 6 Gr. où cela eſt démontré.

Theorême treiſiéme.

Trois grandeurs B, C, D eſtant proportionnelles, ſi la premiere n'eſt pas à la troiſiéme comme nombre à nombre, la moyenne eſt incommenſurable avec elles, tant en elle-même qu'en puiſſance, c'eſt à dire, que C$\mathfrak{C}$ eſt incommenſurable avec BB, & avec D D, & C avec B & avec D.

Voyez le 3 cas de la Prop, 10 l. 6 Gr. où cela eſt démontré.

Probléme premier.

Une grandeur connuë & determinée, eſtant propoſée, trouver des grandeurs qui luy ſoient commenſurables.

Pour trouver des lignes & ſurfaces commenſurables, il ne faut qu'en prendre qui ſoient égales à des nõbres qu'on peut trouver tant qu'on voudra.

Probléme ſecond.

Trouver une ligne qui ſoit incommenſurable en elle-même, & commenſurable en puiſſance avec une ligne connuë.

Je

Je cherche premierement une ligne dont la valeur ſoit à la connuë comme deux nombres qui ne ſont pas quarrez. Entre ces deux lignes je cherche une moyenne proportionnelle, laquelle par le Th. 12 *ſup.* ſera incommenſurable en elle-même avec ces deux premieres lignes, & commenſurable en puiſſance.

Probléme Troiſiéme.

Trouver une ligne qui ſoit incommenſurable tant en elle-même qu'en puiſſance avec une ligne connuë & donnée.

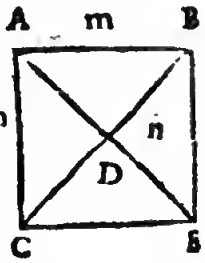
Soit la ligne donnée & connuë B, je luy cherche par le Probl. precedant la ligne D qui luy ſoit incommenſurable en elle-même. Aprés entre B & D ayant trouvé la ligne C moyenne proportionnelle, cette ligne par le Th. 13 *ſup.* ſera incommenſurable tant en elle-même, qu'en puiſſance avec B, ce qu'il faloit faire.

Theoréme quatorziéme.

La diagonale d'un quarré eſt incommenſurable en elle-même & commenſurable en puiſſance avec chacun des côtez.

Les diagonales AE & BC dans le quarré A B C E ſe coupent par la moitié, ainſi BD eſt la moitié de B C, par con-

ſequent BC, BD :: 2, 1: or AB eſt moyen proportionnel entre BC & BD par le Theorême 7, § 1 *ſup.* donc par le Th. 12 *ſup.* puiſque 2 & 1 ne ſont pas deux nombres quarrez, AB côté du quarré ABCE ſera incommenſurable avec la diagonale BC en elle-même, & commenſurable en puiſſance, ce qui eſt evident, car ſuppoſant BC égal à n, par le Th. 4, § 3 *ſup.* nn = mm + mm, partant nn, mm :: 2, 1.



Theorême quinziéme.

Les deux parties d'une ligne rationnelle coupée en moyenne & extrême raiſon, ne ſont pas rationnelles.

Soit AB ligne rationnelle coupée en moyenne & extrême raiſon au point C: je dis que les parties AC & CB ne ſont pas lignes rationnelles, ou ce qui eſt la même choſe, elles ne peuvent être exprimées par nombre.

J'ajoûte à AB la ligne BD moitié de AB, par le Th. 11, § 3 *ſup.*

le quarré de la mediane CB jointe avec BD eſt cinq fois plus grand que le quarré de BD: ainſi ces deux quarrez ſont comme 5 a 1: or 5 n'eſt pas un nombre quarré; donc par le Th. 2 *ſup.* la ligne CB +

BD n'eſt pas rationnelle, mais BD moitié de AB ligne rationnelle eſt rationnelle ; il faut donc que ce ſoit la mediane CB qui ne ſoit pas rationnelle : & partant par le Th. 7 la petite partie AC ſera incommenſurable, car ſi elle eſtoit commenſurable, CB le ſeroit auſſi, par le Th. 5.

Corollaire.

La mediane eſt incommenſurable avec la toute, tant en elle-même qu'en puiſſance.

Soit b une ligne coupée en moyenne & extrême raiſon, x eſt la mediane, & b— x la petite partie. ∴ b, x, b— x Or puiſque b— x eſt une ligne non rationnelle, par le Theoréme preſent : donc par le Th 13 *ſup.* x moyenne entre b & b— x eſt incommutable avec b. tant en elle-même qu'en puiſſance.

Theorême ſeiziéme.

Quand le rayon d'un cercle eſt rationnel, le côté du decagone inſcrit dans ce cercle eſt incommenſurable, tant en luy-même qu'en puiſſance avec ce rayon.

Soit B ligne rationnelle rayon d'un cercle, coupée en moyenne & extrême raiſon: x que je ſuppoſe être la mediane, ſera par le Problême 7, § 1 *ſup.* le côté du decagone. Or par le Corollaire du Th. precedant x mediane eſt incommenſurable tant en elle-même qu'en puiſſance avec B.

Theorême dix-ſeptiéme.

Lors que le rayon d'un cercle eſt ra-

tionel, les côtez du pentagone inſcrit dans ce cercle ſont incommenſurables tant en eux-mêmes qu'en puiſſance avec ce rayon.

Soit b ligne rationelle rayõ d'un cercle, z le côté d'un pẽtagone, & x le côté d'un decagone inſcrits dans le cercle dõt b eſt le rayon. Par le Th. 8 § 3, *ſup.* bb + xx = zz: donc par le Th. 4 *ſup.* puiſque le quarré xx n'eſt pas rationnel, comme nous venons de le démontrer dans le dernier Theorême, le quarré zz ne peut être rationnel, & par conſequent ſa racine z n'eſt pas rationnelle, puiſque tout quarré qui n'eſt pas égal à un nombre quarré ne peut avoir pour racine une grandeur préciſément égale à un nombre, comme nous l'avons prouvé cy-deſſus Theor. 2e.

ELEMENS DE GEOMETRIE, OV DE LA MESVRE DV CORPS.

LIVRE QVATRIE'ME.

De la troiſiéme dimenſion du corps, *OV* Des Solides.

AVERTISSEMENT.

LES plans en ſe coupant, ou en ſe rencontrant forment les ſolides, ce qui nous oblige de parler icy de leurs Sections & rencontres : outre que les Theorémes ſuivans ſervent à démontrer pluſieurs propoſitions

conſiderables dans les Mathematiques. L'on ne cite pas dans ce Livre rigoureuſement toutes les propoſitions qui pouvoient ſervir à la demonſtration d'un Theorême, lors qu'il eſt facile de les ſuppléer, à quoy il eſt bon d'accoûtumer l'eſprit.

SECTION PREMIERE.

Des Sections & rencontres des Plans.

Definitions.

Premiere definition.

PLan, ou ſurface droite, eſt celle qui eſt faite par le mouvement droit & uniforme d'une ligne droite le long d'une ligne droite.

Scholie.

C'eſt à dire, que l'eſpace que parcourt cette ligne droite, qui eſt meüe le long d'une autre ligne droite qu'on conçoit immobile, & avec laquelle elle garde toujours la même diſpoſition, eſt un plan : ainſi il eſt evident qu'un plan eſt compoſé de lignes droites, ce qui fait qu'on le definit de la maniere ſuivante.

Seconde definition.

Plan eſt une ſurface, à laquelle une ligne droite peut être appliquée en tout ſens, & convenir avec elle.

Scholie.

Puis qu'un plan eſt compoſé de lignes droites, qui ſont les plus courtes qu'on puiſſe concevoir entre leurs extremitez, la definition ſuivante eſt encore vraye.

Troiſiéme definition.

La ſurface d'un plan eſt la plus courte

qu'on puiſſe concevoir entre les bornes de ce plan.

Scholie.

Ie ne dis pas que toute ſurface qui eſt la plus courte entre ſes bornes ſoit un plan ; car entre deux lignes qui ſont à quelque diſtance l'une de l'autre, , & qui ne ſont pas poſées de la même maniere, ou ne ſont pas dans un même plan , ſi on mene des lignes droites ; on fera une ſurface la plus courte qui puiſſe être entre ces deux lignes , mais elle ne ſera pas un plan , ainſi quoy qu'il ſoit vray que tout plan eſt une ſurface la plus courte qu'on conçoive entre ſes bornes; neanmoins toute ſurface la plus courte entre ſes bornes n'eſt pas un plan , Euclide definit le plan une ſurface qui eſt également comprise entre ſes lignes , ce qui n'eſt pas clair

Quatriéme definition.

Un plan eſt dit perpendiculaire ſur un autre plan, lors qu'il ne panche pas plus d'un côté que de l'autre.

Cinquiéme definition.

Deux plans ſont paralelles lors que dans toutes leurs parties ils ſont à une égale diſtance l'un de l'autre, & qu'étant prolongés ils ne ſe rencontrẽt point.

Demandes ou propoſitions evidentes.

Premiere Demande.

On peut prolonger un plan, ou le concevoir prolongé de tous côtez , autant qu'il ſera neceſſaire.

Seconde Demande.

Vne ligne droite ne peut être en partie ſur un plan, & en partie en l'air.

Scolie.

Car pour lors cette ligne ne pourroit être appliquée avec ce plan, & convenir avec luy ; ainſi ſelon la ſeconde definition ce plan ne ſeroit pas plan.

Troiſiéme demande.

Deux lignes droites qui ſe coupent peuvent être conceües dans un même plan.

Scholie.

Les lignes D B & E C ſe coupent, ayant mené entre A B & A C des lignes droites par la ſeconde & la troiſiéme definition, on aura une ſurface qui eſt un plan: car on y peut appliquer une ligne droite, & c'eſt la ſurface la plus courte qu'on puiſſe concevoir entre les lignes AB & AC qui ſeront ſur ce plan, lequel étant prolongé ſi AD & AE, qui ſont parties des lignes BD & EC ne ſe trouvent pas dans ce même plan, BD & CE ſeront en partie ſur luy, & en partie en l'air contre la ſeconde demande.

Quatriéme demande.

Tout triangle peut être conceu dans un plan.

Scholie.

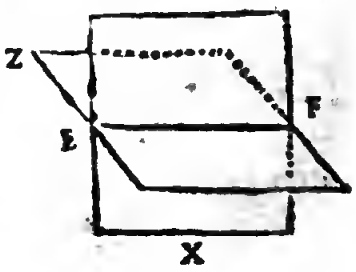
Cela ſe peut demontrer comme la demande precedante.

Cinquiéme demande.

La commune ſection ou rencontre de deux plans, eſt une ligne droite.

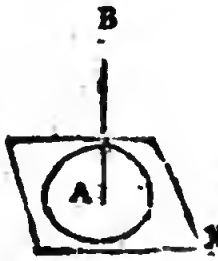
Scholie.

X & Z ſe coupent. Les extremitez de leur ſection ſont les points E & F, entre leſquels on a mené une ligne ſur Z & une ſur X, Si ces deux lignes n'étoient pas une même ligne; on pourroit mener entre deux mêmes points plus d'une ligne droite, ce qui n'eſt pas. La ſection de ces deux plans ne peut donc être qu'une ligne droite.



Sixiéme demande.

Une ligne droite telle que AB élevée ſur le plan X doit être cenſée perpendiculaire, lors que de A ſon pied, com-

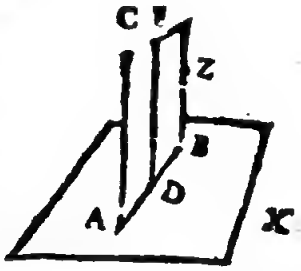


me centre ayant fait un cercle, B ſon ſommet eſt également éloigné de la circonference de ce cercle ; & ſi cela n'eſt pas, elle ne peut être dite perpendiculaire.

Scholie.

Cela eſt conforme à la notion de la ligne perpendiculaire ; qui ne panche pas plus d'un côté que d'autre.

Septiéme demande.



Concevant que AC une ligne perpendiculaire ſur le plan X, eſt meüe d'un mouvement droit & uniforme ſelon une ligne droite, telle que AB, elle fera le plan Z, qui ſera perpendiculaire en toutes ſes parties ſur le plan X.

Huitieme demande.

Si la ligne ED perpendiculaire ſur AB ſection de Z & de X eſt perpendiculaire ſur X, tout le plan Z eſt perpendiculaire ſur X.

Scholie.

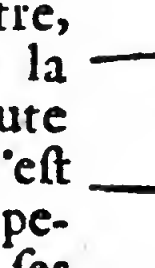
Car on peut concevoir que le plan Z eſt fait par le mouvement droit & uniforme de DE ſur AB, ainſi par la demande precedante, le plan Z eſt perpendiculaire ſur le plan X.

Theorême premier.

Entre deux lignes Z & X qui ſont dans un même plan, ou entre la ligne X & le point A, on ne peut concevoir qu'un même plan.

Car ſi on veut concevoir deux plans,

l'un ſera plus grand ou plus petit, ce qui ne peut être, puiſque par la 3e definit. toute ſurface qui n'eſt pas la plus petite entre ſes bornes n'eſt pas un plan : ils ſeront donc égaux, ce qui étant, ils ne ſont pas differens ; car ſi on veut dire qu'ils ſont poſez l'un ſur l'autre, comme ils n'ont point d'épaiſſeur, ils ne peuvent faire qu'un ſeul plan.



Theorème ſecond.

Deux plans qui conviennent en trois points qui ne ſont pas ſur la même ligne, conviennent entierement.

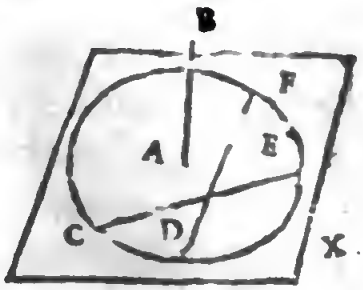
Entre ces trois points on ne peut concevoir deux differens plans, par le Th. precedant, ainſi la partie de ces deux plans entre ces trois points eſt une même choſe ; par conſequent ſi on prolonge cette partie, ce ne ſera qu'un même plan, ainſi ces deux plans ne ſeront pas differens.

Corollaire.

La poſition d'un plan ne dépend ainſi que de trois points, qui ne ſoient pas ſur une même ligne.

Ou, *Ce qui eſt la même choſe*, Trois points qui ne ſont pas ſur une même ligne étant donnez, le point eſt donné.

Theoreme troiſième.



Si B ſommet de la ligne A B élevée ſur le plan X eſt également éloigné de C, D, E, trois points également diſtans de ſon pied A, cette ligne eſt perpendiculaire ſur X.

1° Concevons dans le plan X un cercle également diſtant de B, qui paſſe par C, D, E, qu'on a ſuppoſé en égale diſtance de B. 2° Concevons un ſecond cercle dont A ſoit le centre, qui paſſe par les trois points C, D, E, auſſi également éloignez de A par l'hipoteſe. Ces deux cercles par le 1er Cor. Prob. 1er liv. 1er § 5e ne ſont qu'un méme cercle. Donc par la dem. 6e *ſup.* AB eſt perpendiculaire ſur X.

Probléme premier.

D'nn point donné en l'air comme eſt B. abaiſſer une perpendiculaire ſur le plan X. je tire à diſcretion deux lignes droites C E & D F, & appliquant une pointe du compas ſur B, avec l'autre je prend les points C, B, E, F, également diſtans, par leſquels je fais paſſer un cercle, au centre duquel je mene de B. une ligne qui ſera perpendiculaire par le Th. preced.

Theorème quatrième.

Si une ligne eſt perpendiculaire ſur le point de la ſection de deux lignes qui

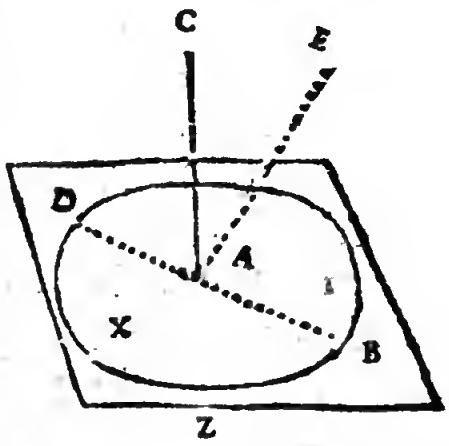
ſont ſur un plan, elle l'eſt ſur tout ce plan.

Car ayant pris dans ces deux lignes de part & d'autre du point de ſection des points également éloignez, le ſommet de la perpendiculaire ſur ces lignes ſera également éloigné de quatre points qui ſont ſur ce plan, partant par le Th. precedant cette ligne ſera perpendiculaire ſur tout le plan.

Theoréme cinquiéme.

La ligne droite AB & toute autre dans le plan Z menée par A pied de la perpendiculaire AC ſur ce plan, eſt perpendiculaire ſur AC, *ou* AC eſt perpendiculaire ſur toutes les lignes droites du plan Z qui paſſent par A.

De A pied de la perpendiculaire AC je décris X un cercle & je prolonge la ligne BA, de ſorte qu'elle coupe X en D & B, ſi C ſommet de la perpendiculaire AC n'eſt pas également diſtant de D & de B, alors AC ne ſera pas perpẽdiculaire ſur AB, mais auſſi ſelon la 6e demande A C ne ſera pas perpendiculaire ſur le plan Z; ce qui eſt contre l'hipotheſe. AB rencontre donc perpendi-



culairement AC, ainſi de toute autre ligne du plan Z qui paſſe par A.

Theorême ſixiéme.

On ne peut d'un point ſur un plan élever qu'une perpendiculaire

Voyez la figure precedante.

Que cela ne ſoit, concevons que ſur le même point A on éleve les deux lignes AE & AC qu'on ſuppoſe perpendiculaires, & que de A comme centre on décrive X un cercle, les points E & C ſommets des deux lignes égales AE & AC eſtans differens ne peuvent eſtre également éloignez de la circonference du cercle X; partant par la 6e dem. *ſup.* elles ne ſont pas toutes deux perpendiculaires ſur le plan Z.

Theoréme ſeptiéme.

D'un point hors d'un plan on ne peut mener qu'une perpendiculaire ſur ce plan.

Soit A le point donné au deſſus d'un plan d'où on ſuppoſe qu'on a mené deux perpendiculaires, ſçavoir AB & AC: je joints leurs pieds B & C par la ligne BC, laquelle par le Th. 5e *ſup.* eſt perpendiculaire ſur BA: on peut par la demande 4 *ſup* concevoir le triangle ABC dans un même plan; puiſque donc AB eſt perpendiculaire ſur BC, par le Th. 3 liv. 1 & 4, AC ne peut

être perpendiculaire ſur BC, & par conſequent elle ne l'eſt pas ſur le plan propoſé. On ne peut donc mener d'un même point A qu'une perpendiculaire ſur un plan.

Theoréme huitiéme.

La ligne perpendiculaire eſt la plus courte qu'on puiſſe mener d'un point hors d'un plan ſur ce plan.

Voyez la figure cy-deſſus.

Le point donné eſt A, la ligne AB eſt perpendiculaire, AC ne l'eſt pas: je joins C & B par une ligne droite, le triangle ABC peut être conceu dans un plan par la demande 4. Or par le Th. 4 § 4, liv. 1, AB eſt la ligne la plus courte.

Corollaire.

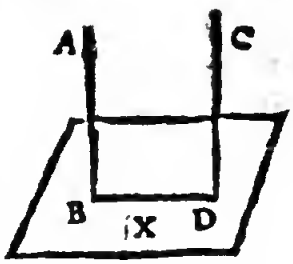
Donc la meſure de la diſtance d'un point hors d'un plan, à ce plan doit être une perpendiculaire, puiſque cette perpendiculaire eſt la ligne la plus courte, & qu'on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire.

Theorême neufiéme.

Deux lignes étans perpendiculaires ſur un même plan, on les peut concevoir dans un même plan.

Concevons qu'on a mené par le pied des deux lignes AB & CD perpendiculaires ſur X, une troiſiéme ligne BD, ſur

laquelle concevons que ABouCD ſe meuve uniformement & toujours perpendiculairemẽt, par la 1re defin. elles feront un plan, ce qu'il faloit démontrer.



Theoréme dixiéme.

AB & CD perpendiculaires ſur le plan X ſont paralelles, & ſi de deux paralelles l'une eſt perpendiculaire ſur le plan X, l'autre le ſera.

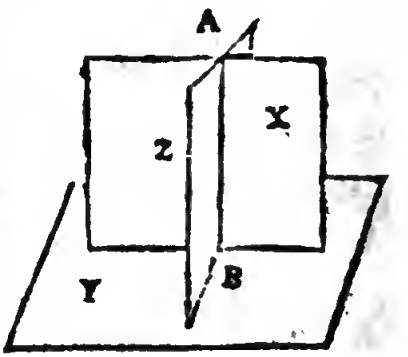
1° Soit mené la ligne BD par le pied de AB & de CD, leſquelles lignes, par le Theor. 5 *ſup.* ſont perpendiculaires ſur BD, donc par le Th. precedant ces trois lignes AB, CD, BD peuvent être dans un même plan, & AB, CD étant perpendiculaires ſur BD, elles ſeront paralelles, par le Lem. 2 § 4. l. 1.

2° Si AB & CD ſont paralelles, & que AB ſoit perpendiculaire, je dis que CD le ſera auſſi; car ayant mené BD, par le Th. 5 AB ſera perpendiculaire ſur BD: donc par le Lem. 3, § 4. l. 1er CD paralelle à AB eſt auſſi perpendiculaire ſur BD, ce qu'il faloit prouver.

Theorême onziéme.

La ſection AB de deux plans Z & X, qui ſont perpendiculaires ſur Y, eſt une perpendiculaire ſur le même plan Y.

1° Par la demande 5e cette ſection eſt une ligne droite.



2° puiſque les plans Z & X ſont perpendiculaires ſur Y, la ligne AB en tant qu'elle eſt conſiderée en Z ne peut être conceüe pãchante de part & d'autre de Z : Et par la même raiſon en tant qu'elle eſt conſiderée en X, on ne peut pas concevoir qu'elle panche de côté ou d'autre de ce plan X ; partant on peut concevoir pour le moins trois points dans le plan Y egalement éloignez de B, qui ſeront auſſi également éloignez de A, ainſi ſelon le Th. 3 *ſup.* AB eſt perpendiculaire ſur le plan Y.

Theorême douzième.

Si trois points dans un même plan, & non ſur une même ligne, ſont également diſtans d'un ſecond plan, ces deux plans ſont paralelles.

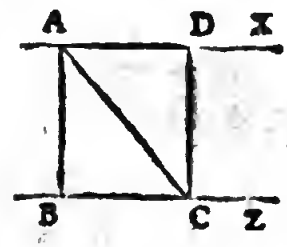
Car par le Cor. du Th. 2 *ſup.* la poſition d'un plan ne dépend que de trois points ; ainſi ſi trois points d'un plan ſont également diſtans d'un ſecond plan, ces deux plans ſont paralelles. Je ſuppoſe qu'on a meſuré la diſtance d'un point à un plan, par une perpendiculaire, comme on a dit dans le Corollaire du Theorême 8e

rême 8e ; qu'il le faloit faire.

Theoréme treziéme.

Les plans X & Z étant paralelles, ſi la ligne AB eſt perpendiculaire ſur X, elle le ſera auſſi ſur Z.

Si on pretend que AB perpendiculaire ſur X ne l'eſt pas ſur Z, ſoit conçû de A ſur Z, la ligne AC perpendiculaire qui ſera plus courte que AB, *par le Th. 4. l. 1. §. 4.* De C je conçois une perpendiculaire ſur X, qui ſera encor plus courte que AC, partant plus que AB ; ainſi le point D s'approchera plus de Z que A, ainſi X & Z n'étant pas en égale diſtance, ils ne ſont pas paralelles, ce qui eſt contre l'hipotheſe ; une ligne donc qui eſt perpendiculaire ſur l'un de ces plans, l'eſt auſſi ſur l'autre.

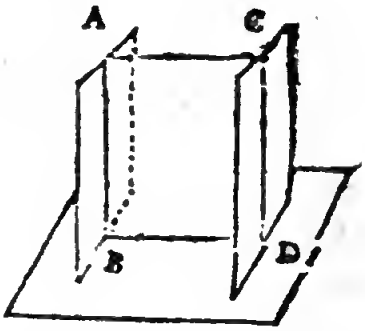


Theorême quatorziéme.

Les ſections AB & CD de deux plans paralelles coupez par un 3e plan, ſont des lignes paralelles.

Ces ſections A B & C D ſont des lignes droites, *par la 5 dem. ſup.* leſquelles ſont dans le 3e plan, où étant prolongées, elles ſe rencontreront ſi elles ne ſont

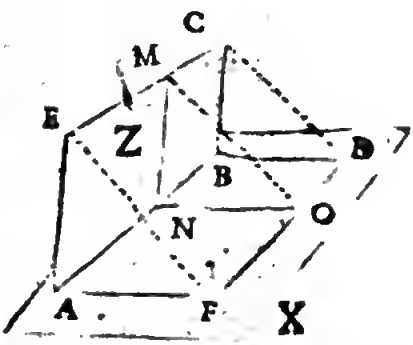
pas paralelles, par conſequent les deux autres plans où elles sõt étant prolongez, ſe rencontreront auſſi, ainſi ils ne ſeront pas paralelles, contre la ſuppoſition. On ne peut pas donc dire que A B & C D ne ſont pas paralelles.



Theorême quinzième.

La ligne CE dans le plan Z étant paralelle avec AB ſection de Z & de X, eſt auſſi paralelle avec toute autre ligne mené ſur le plan X paralellement à AB.

Dans Z je mene C B perpendiculaire ſur AB & & dans X au même point B, la perpendiculaire BD, on peut concevoir CB & B D dans un même plan, ſur lequel AB eſt perpendiculaire, *par le Th.* 4 *ſup.* EC & D F étant paralelle à AB, elles ſeront auſſi perpendiculaires ſur ce même plan, *par le Th.* 10 *ſup.* & conſequemment toutes paralelles, ce qu'il faloit démontrer.



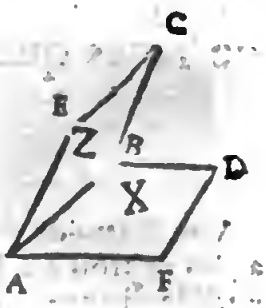
Theoréme ſeiziéme.

Toutes lignes paralelles dans le plan X rencontrant d'autres lignes auſſi paralelles dans le plan Z font entr'elles des angles égaux.

B D & N O ſont paralelles entr'elles ſur le plan X & BC, & NM ſur le plan Z; il faut prouver que l'angle CBD eſt égal à MNO, pour cela je mene DF & CE paralelles à AB. Puiſque les paralelles entre paralelles ſont égales, & que CE eſt paralelle à DF, *par le Th precedant* : partant B D = NO & BC = N M & CD = M O ; donc les triangles C B D & MNO ſont égaux & ſemblables, ainſi l'angle CBD eſt égal à MNO ; ce qu'il faloit démontrer.

Scholie.

Si la ligne BC, perpendiculaire ſur AB, faiſant avec BD, auſſi perpendiculaire ſur AB un certain angle, eſt mené par un mouvement droit & uniforme ſur AB, elle formera Z un plan où toute ligne comme AE perpendiculaire ſur AB fera avec une ligne dans X, auſſi perpendiculaire ſur AB celle qu'eſt AF, le même angle que fait B C avec BD.



Ainſi pour connoître l'angle de l'inclinaiſon d'un plan ſur un autre, il faut mener de Z ſur X à un même point de leur ſection, comme au point A, deux lignes perpendiculaires AE & AF: l'angle E A F ſera celuy que Z eſt cenſé faire avec X.

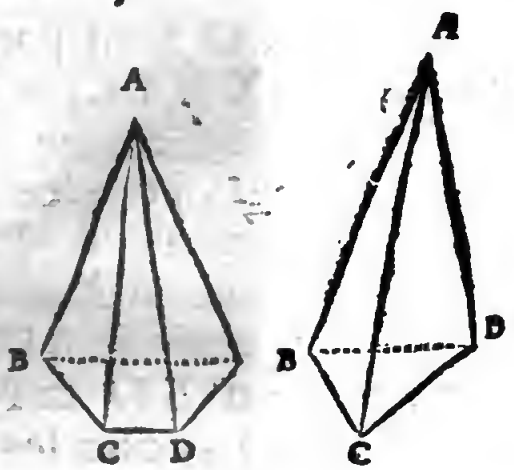
SECTION II.

De la compoſition des Solides.

Definitions.

Premiere definition.

SI la ligne AB, dont le ſommet A eſt fixe, eſt meüe de ſorte qu'elle parcoure les côtez de quelque Polygone, comme de BCD, cette ligne décrira par ce mouvement un ſolide qu'on nomme Pyramide.



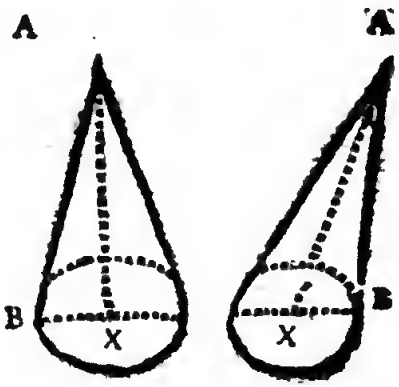
Seconde definition.

Le Polygone BCD s'appellela baſe de la Pyramide, laquelle Pyramide a autant de faces que ce Polygone a de côtez.

Scholie.

Vne Pyramide de trois faces s'appelle triangulaire, ſi elle en a plus de trois on l'appelle generalement Pyramide Polygone. Euclide dit que la Pyramide eſt un ſolide compris de pluſieurs plans qui ſe rencontrent en un même point, ayant un autre plan pour baſe.

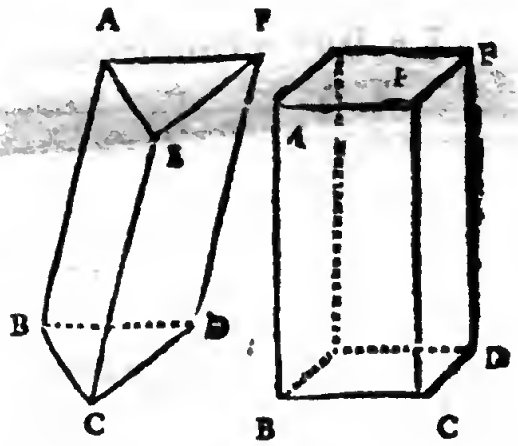
Troiſième definition.



Si la ligne AB, dõt le ſommet A eſt fixe, ſe meut en parcourant le cercle X, elle fait un cone dont le cercle X eſt la baſe, & la ligne tirée de la pointe A au centre du cercle eſt dite l'axe de ce Solide.

Quatriéme definition,

Si la ligne A B ſe meut uniformément autour de deux Polygones égaux & sẽblables A E F & BCD qui ſoient paralelles & ſituez, de ſorte que les côtez égaux ſe répondent paralellement, le ſolide qui ſe fera eſt un priſme, qui a pour baſe ce Polygone.



Scholie.

Euclide conſidere les Priſmes comme comptis entre des plans

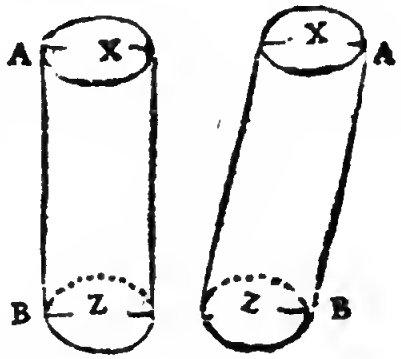
Cinquiéme definition.

Un Priſme a autant de faces que le

Polygone qui eſt ſa baſe a de côtez. Si la baſe du Priſme eſt un Parallelogramme, il s'appelle Parallelipide, ſi c'eſt un triangle, Priſme triangulaire ; s'il a plus de trois faces, Priſme Polygone.

Sixiéme definition.

Si la ligne A B ſe meut autour de deux cercles Z & X égaux, & dont les plans ſont paralelles, elle décrit un cilindre.



Septiéme definition.

La ligne qui joint les centres des cercles X & Z, qui ſont les baſes du cilindre, s'appelle l'axe du cilindre.

Huitiéme definition.

Dans toutes ces figures, lors que l'axe eſt perpendiculaire ſur la baſe, les ſolides ſont appellez droits.

Neufiéme definition.

Si un demy cercle tourne autour de ſon diametre, il décrit une ſphere.

Dixiéme definition.

Le diametre du cercle dont la revo-

lution a formé la ſphere, eſt l'axe de cette ſphere.

Onziéme definition.

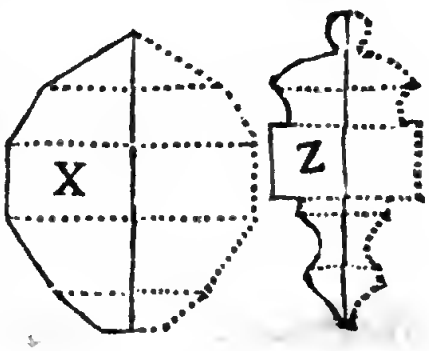
Le centre du cercle qui a décrit la ſphere eſt le centre de la ſphere

Douziéme definition.

Les lignes tirées du centre de la ſphere à la circonference, s'appellent rayons de la ſphere, & celles qui paſſant par le centre de la ſphere ſe terminent à la circonference, ſont appellées diametres de la ſphere.

Treziéme definition.

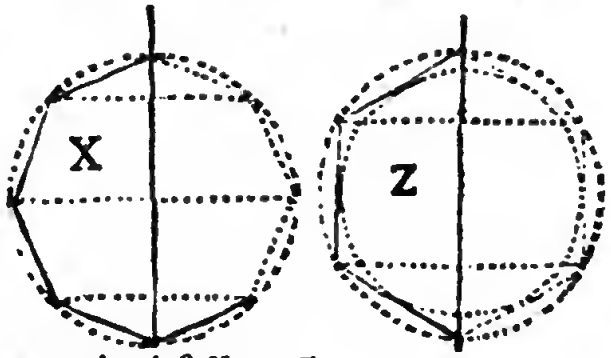
Si on conçoit qu'une figure rectiligne ou mixte, comme X ou Z tourne circulairement ſur un de ſes côtez, comme axe elle décrira par ſa revolution un ſolide nommé Spheroïde.



Scholie.

Quoy qu'il puiſſe y avoir ainſi une infinité de Spheroïdes faits par la revolution d'une infinité de figures rectilignes ou mixtes, neanmoins l'on ne parle dans la ſuite que des ſeuls

Spheroïdes formez par la revolution de la moitié d'un Polygone regulier, inſcrit, ou circonſcrit à un cercle, tournant circulairement ſur le diametre de ce cercle comme axe, tel qu'eſt X ou Z.



Quatorziéme definition.

L'angle ſolide ſe fait quand trois ou pluſieurs plans ſe coupent en aboutiſſant à un point, comme la pointe d'un diamant bien taillé.

Scholie.

Ainſi deux angles plans ne peuvent faire un angle ſolide.

Quinziéme definition.

Corps regulier eſt celuy qui eſt compris entre des figures regulieres & égales, duquel auſſi tous les angles ſolides ſont égaux.

Scholie.

ON demontrera dans la ſuite qu'il n'y a que cinq corps reguliers, dont voicy les definitions par avance.

Seziéme definition.

La Tetraëdre eſt un ſolide regulier compris ſous quatre triangles égaux & equilateraux; ce qui eſt une pyramide dont la baſe eſt égale à chaque face.

Dix ſeptiéme definition.

L'exaëdre ou Cube eſt compoſé de ſix

quarrez égaux, comme un dé à joüer.

Dix-huittéme definition.

L'Octaëdre eſt de huit triangles égaux & equilateraux.

Dix-neufiéme definition.

Le Dodecaëdre eſt compris ſous douze pentagones égaux & equilateraux.

Vingtiéme definition.

L'Icoſaëdre eſt de vingt triangles égaux & equilateraux.

Vingt-uniéme definition.

Un ſolide A eſt dit circonſcrit à un autre ſolide B qu'il contient, s'il eſt le plus petit de tous les ſolides ſemblables qui puiſſent renfermer B, *ou, ce qui eſt la méme choſe,* ſi B eſt le plus grand de tous les ſolides que A peut renfermer.

Vingt-deuxiéme definition.

Un ſolide B eſt dit inſcrit dans une autre ſolide A, où il eſt renfermé, s'il eſt le plus grand de tous les ſolides ſemblables qui puiſſent être renfermez dans A, *ou ce qui eſt la méme choſe,* ſi A eſt le plus petit de tous les ſolides ſemblables qui puiſſent renfermer B.

Scholie.

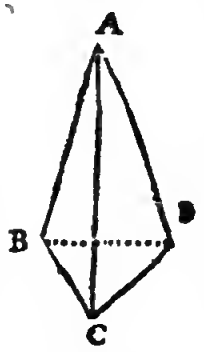
Ces definitions donnent les idées les plus claires & les plus generales qu'on puiſſe avoir des circonſcriptions, ou inſcriptions des ſolides. Vn cilindre eſt dit circonſcrit à une ſphere, qui eſt la plus grande qu'il puiſſe renfermer & par conſequent dont il touche la circonference: ſi la ſphere eſtoit plus petite, on ne

pourroit pas dire proprement que le cilindre luy fut circonſcrit, & un cilindre eſt conceu inſcrit dans une ſphere qui eſt la plus petite qu'on puiſſe concevoir renfermer ce cilindre, & par conſequent qui touche les deux cercles de ces deux baſes.

Theorême premier.

Si un angle ſolide eſt compris de trois angles plans, deux de ces angles plans pris enſemble comme on voudra, ſont plus grands que le troiſiéme.

Les angles BAD, BAC, CAD font un angle ſolide; on ne peut pas, par la 2e definit. des ſurfaces planes, concevoir de plan plus petit entre AB & AD que BAD; partant BAD eſt plus petit que la ſurface creuſe ABCD : on démontrera de la même maniere que l'angle plan BAC eſt plus petit que BAD avec CAD.

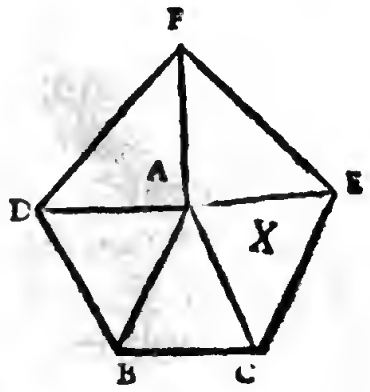


Theorême ſecond.

Tous les angles des plans qui comprennent un angle ſolide, valent moins que quatre angles droits.

1° Soit X un angle ſolide compris ſous cinq triangles, dont le ſommet A doit être conçû en l'air. Langle DBC eſt plus petit que les deux angles DBA & CBA; *par le Th. precedant*, ainſi BCE eſt plus petit que les angles ACB & ACE pris enſemble, de même des autres.

2° Tous les angles du Polygone BCEFD baſe de l'angle ſolide ſont, *par le Coroll. du Th.* 7, § 3 *l.* 2. égaux à ſix angles droits, ainſi tous les angles de la baſe des cinq triangles qui ſont l'angle ſolide X ſont plus grands que ſix droits, puis qu'ils ſont plus grands que les angles du Polygone, *par le Th. precedant.* Tous les angles de ces cinq triangles qui ſont l'angle ſolide valent dix droits; donc puiſque ceux de leurs baſes valent plus de ſix droits; ceux des ſommets valent moins que quatre droits; ce qu'il faloit démontrer.



Scholie.

On peut démontrer ce Theoréme en cette maniere, concevons que A eſt un point dans X, & le ſommet de pluſieurs triangles dont les côtez de X ſont les baſes. 1. Tous ces angles autour de A ne valent que quatre angles droits. 2. Si on leve le point A, alors les angles du ſommet de ces triangles deviendront plus petits ayans mêmes baſes, & les côtez plus grands, ce qui étant tous ces angles vaudront moins que quatre angles droits.

Theorême troiſiéme.

On ne peut inſcrire dans une ſphere que les cinq corps reguliers.

C'eſt à dire, qu'on ne peut concevoir aucun autre ſolide compris ſous des figures planes toutes égales & ſemblables, dont tous les angles touchent la ſphere

dans laquelle ce ſolide ſoit conceu inſcrit.

La raiſon eſt qu'il n'y a que les angles plans dont ces cinq corps ſont compoſez qui puiſſent faire un angle ſolide, comme nous l'allons démontrer.

1° Trois triangles égaux & equilateraux peuvent faire un angle ſolide, car les trois angles de ces triangles qui comprendront un angle ſolide ne valent que trois fois 60 degrez, chacun des angles d'un equilateral étant de 60. Trois de ces triangles joints enſemble font les angles ſolides du Tetraëdre.

2° Quatre de ces triangles peuvent encore faire un angle ſolide, tel que celuy de l'Octaëdre; car les quatre angles qu'ils comprendront ne valent que quatre fois 60, ce qui eſt moins que quatre droits.

3° Cinq de ces triangles peuvent faire encor un angle ſolide, car les angles des plans qu'ils comprennent, ne valent que cinq fois 60 degrez, ce qui eſt moins que quatre angles droits. L'angle de l'Icoſaëdre eſt fait par cinq triangles.

Six triangles equilateraux ne peuvent faire un angle ſolide; car les angles plans qui comprendroient l'angle ſolide vaudroient quatre angles droits; ainſi ils feroient un plan & non un ſolide, *par le Th. 2. ſup.*

4° Prenant des quarrez, ſi on en joint

trois enſemble, on a l'angle du cube, mais quatre quarrez dont les quatre angles ſont droits, joints enſemble font un plan.

4° Trois pentagones font encor un angle ſolide, qui eſt celuy du Dodecaëdre, mais quatre pentagones ne le peuvent pas, car leurs angles vaudroient plus de quatre droits.

6° Plus les figures ont de côtez, les angles que comprennent ces côtez ſont plus grands; ainſi ſi trois exagones ne peuvent faire un angle ſolide, à plus forte raiſon les eptagones, ne le peuvent faire; ainſi des autres figures qui ſuivent.

Premiere demande.

Une figure eſt plus grande que celle autour de laquelle elle eſt circonſcrite, & plus petite que celle dans laquelle elle eſt inſcrite.

Seconde Demande.

De deux priſmes de même hauteur, celuy dont la baſe eſt moindre, & qui par conſequent peut être compriſe en celle de l'autre, eſt plus petit.

Scholie.

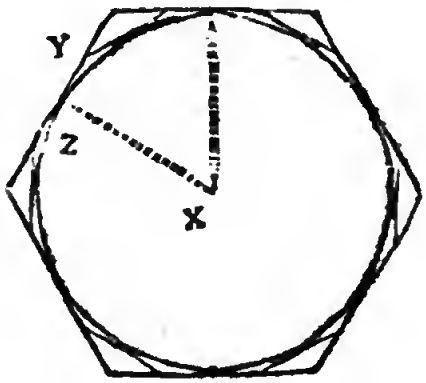
Car il eſt evident qu'il y eſt contenu: or ce qui contient eſt plus grand que ce qui eſt contenu.

Theorême quatrième.

De deux priſmes circonſcrits à un ci-

lindre, celuy-là approche plus du cilindre qui a plus de côtez.

La baſe d'un cilindre propoſé eſt X, celle du priſme qui a moins de côtez, & qui eſt circonſcrit au cilindre ſoit nommé Y,& Z celle d'un autre priſme qui a plus de côtez,& qui eſt circonſcrit au même cilindre. Le Polygone Z *par le T.* 8, § 4. *l.* 2, eſt plus petit que le Polygone Y : les Priſmes dont ces Polygones ſont les baſes, ſont de même hauteur, étant circonſcrits à un même cilindre, donc *par la demande preced.*. celuy qui ſera ſur Z, & qui a ainſi plus de côtez, eſt plus petit que celuy qui en a moins, dont Y eſt la baſe; ainſi il approche plus du cilindre ; ce qu'il faloit démontrer.



Corollaire.

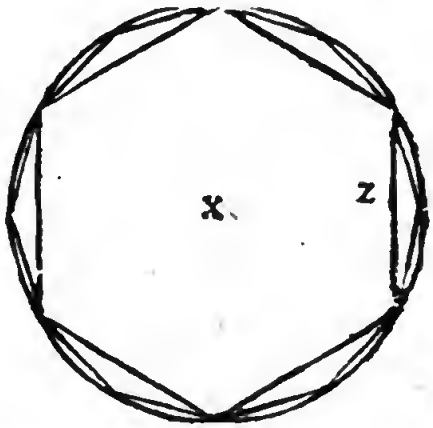
Donc un Priſme d'une infinité de côtez approche ſi prés du cilindre qu'il n'y a point de difference ; ainſi on peut ſuppoſer que le cilindre eſt un Priſme d'une infinité de côtez.

Theorême cinquieme.

De deux Priſmes inſcrits dans un ci-

lindre, celuy-là approche plus du cilindre qui a plus de côtez.

La baſe du cilindre propoſé eſt X, les deux Polygones Z & X inſcrits dans ce cercle ſoient les baſes de deux Priſmes inſcrits dans ce cilindre dont X eſt la baſe.



Par le Th.9. § 4. l. 2, le Polygone Y qui a plus de côtez, eſt plus grand & approche plus du cercle que le Polygone Z : ces deux Priſmes, dont Z & Y ſont les baſes, ſont de même hauteur, étans inſcrits dans un même cilindre; donc *par la demande prec.* le Priſme qui eſt ſur Y eſt plus grand que celuy qui eſt ſur Z : ainſi il approche plus du cilindre, ce qu'il faloit démontrer.

Troiſiéme demande.

De deux pyramides de même hauteur, celle qui a une plus grande baſe eſt la plus grande.

Scholie.

Car il eſt evidant que ſi l'on conçoit que l'une ſoit miſe dans l'autre, celle qui a une plus grande baſe contiendra celle qui en a une plus petite.

Theorême ſixiéme.

De deux pyramides circonſcrites à un cone, celle qui a plus de côtez approche plus du cone.

Cela ſe démontre comme les precedans Theorêmes.

Theorême ſeptième.

De deux pyramides inſcrites dans un cone, celle qui a plus de côtez approche plus du cone.

Cela ſe démontre comme les precedans Theorêmes.

Corollaire.

Donc on peut ſuppoſer qu'un cone eſt une pyramide d'une infinité de côtez.

Theorême huitiéme.

Plus un Polygone a de côtez, le ſpheroïde qu'il forme approche plus de la ſphere autour de laquelle il eſt circonſcrit.

Cela ſe démontre par la même voye que les Theorêmes precedans, car plus le Polygone, qu'on peut appeller le Generateur du Spheroïde, aura de côtez, par les

par les th. 8 *&* 9, § 4 *l.* 2, *& leurs Coroll.* plus il approchera du cercle; ainſi le Spheroide qu'il décrira par ſa revolution approchera plus de la ſphere, à laquelle il eſt circonſcrit. Ce qu'il faloit démontrer.

Corollaire.

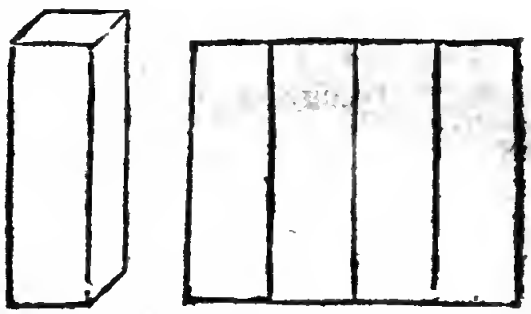
Donc une ſphere peut être priſe pour un Spheroïde formé par un Polygone d'une infinité de côtez.

SECTION III.

De la ſurface des Solides.

Theoréme premier.

LA ſurface d'un Priſme droit eſt égale à un Parallelogramme, qui eſt de même hauteur que ce Priſme, & dont la baſe eſt égale au circuit de ce Priſme.



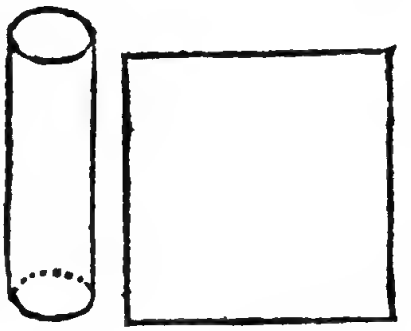
Les ſurfaces d'un Priſme ſont des Parallelogrammes tous de même hauteur, dont les baſes priſes enſemble font le circuit de ce Priſme, par conſequent ils ſont égaux à un Parallelogramme de la hauteur du Priſme, & dont la baſe eſt égale à ſon circuit, ce qui eſt evident.

Scholie.

On n'y comprend point les ſurfaces des baſes.

Corollaire premier.

Donc puis qu'un cilindre peut être pris pour un Priſme, *conformément à la definition* 8e, § 2 *ſup.* qui a une infinité de faces, la ſurface d'un cilindre eſt égale à un Parallelogramme de même hauteur,& dōt la baſe eſt égale à la circonference du cercle, qui eſt la baſe de ce cilindre.



Corollaire ſecond.

Donc tout ce qui a été démontré de la raiſon qu'ont les Parallelogrammes entr'eux convient aux ſurfaces des cilindres.

Per exemple. 1. Les ſurfaces de deux cilindres ſont l'une à l'autre en raiſon compoſée de leur hauteur, & du circuit de leur baſe.

2. Ainſi dans deux cilindres, ſi la hauteur eſt à la hauteur, comme la baſe à la baſe, c'eſt à dire, ſi la raiſon de leurs ſurfaces eſt compoſée de deux raiſons égales, cette raiſon eſt doublée, *par le Th.* 14 § 3. *l.* 3.

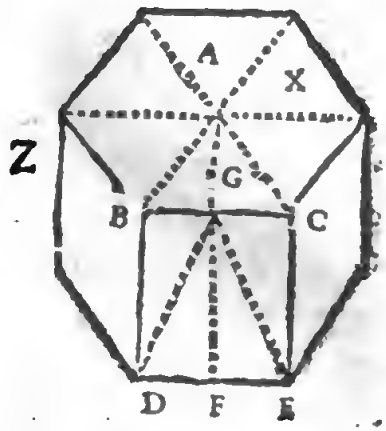
3. Si deux cilindres ont, ou leurs hauteurs, ou leurs baſes égales, leurs ſurfaces ſont entr'elles comme les inégales, *par le Th.* 15. § 3. *l.* 3.

4. Les baſes d'un cilindre ſont des cercles; donc puiſque les circonferences ſont entr'elles comme leurs diametres. *par le Th.* 5 § 2, *l.* 3. les ſurfaces de deux cilindres de même hauteur ſont entr'elles comme les diametres des cercles de leurs baſes.

5. Enfin comme l'on peut trouver, *par le Probl.* 3. §. 3. *l.* 3 un Parallelogramme qui ſoit ſemblable, & en raiſon donnée à un autre; ainſi on pourra trouver un cilindre dont la ſurface ait une raiſon requiſe avec celle d'un autre cilindre.

Theoréme ſecond.

Le Polygone X eſt une des deux baſes du Priſme Z, la hauteur GF de ce Priſme eſt égale à GA, qui eſt une ligne menée de A centre du Poligone X perpendiculairement ſur BC l'un des côtez: je dis que la ſurface du Priſme Z eſt double de celle du Polygone X.



De tous les angles du Polygone X ayant mené des lignes au centre A, on fait autant de triangles que Z a de faces, leſquelles faces ſont des Parallelogrammes. Or ces Parallelogrammes, comme eſt BCED, & ces triangles comme eſt ABC, ont même hauteur & même baſe : donc ces Parallelogrammes ſont doubles de ces triangles, *par le Th.* 4, § 4. *l.* 2, & par conſequent la ſurface de Z compoſée de ces Parallelogrammes eſt double de celle de X égale à tous ces triangles.

Corollaire premier.

Donc ſi la hauteur d'un cilindre qu'ō peut regarder comme un Priſme eſt égale au rayon du cercle, qui eſt ſa baſe, ſa ſurface ſera double de celle du cercle.

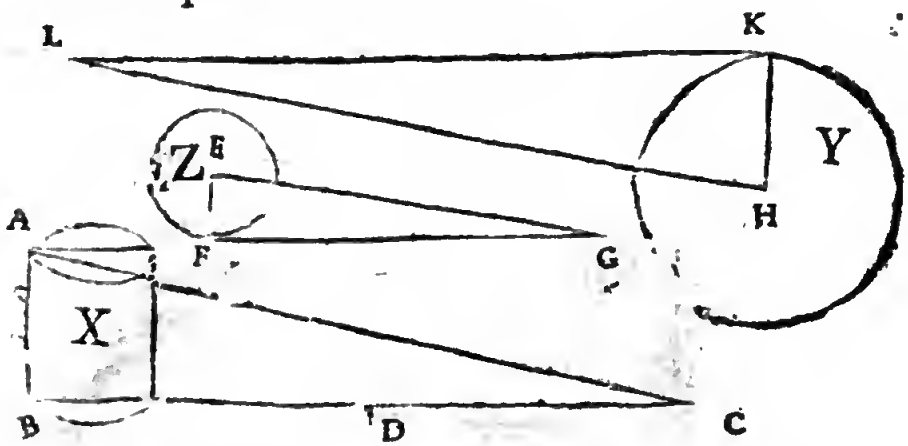
Corollaire ſecond.

Ainſi ſi un cilindre a pour ſa hauteur

deux fois le rayon, ou une fois le diametre du cercle, qui eſt ſa baſe, ſa ſurface ſera quatre fois plus grande que celle de ce cercle.

Theorême troiſiéme.

La ſurface du contour d'un cilindre eſt égale à celle d'un cercle dont le rayon eſt moyen proportionnel entre la hauteur de ce cilindre & le diametre du cercle qui eſt ſa baſe.



X eſt un cilindre dont AB eſt la hauteur, BD le circuit de ſa baſe, qui eſt le cercle Z, dont le circuit eſt FG ou BD, & BC le double de ce circuit. La ſurface de X eſt égale au Parallelogramme ABD, ou au triangle ABC, comme celle du cercle Z au triangle EFG.
Je ſuppoſe que H K rayon du cercle Y eſt moyen proportionnel entre A B hauteur de X, & 2 EF diametre de Z.

Soit KL le circuit de Y, ainſi ſa ſurface eſt égale au triangle HKL : il n'eſt

donc queſtion que de prouver que le triangle HKL eſt égal au triangle ABC.

Par l'hipotheſe :: AB , HK, 2EF : or HK , KL : : 2EF , 2FG ou B C : donc HK , 2 E F :: KL , B C donc puiſque A B , H K , / K L , B C , } :: HK, 2EF : donc A B , HK :: KL , BC ; partant le rectangle de des extrêmes AB & BC eſt égal à celuy des moyens HK &KL, & conſequemmẽt les triangles ABC, HKL , qui en ſeront les moities ſeront égaux, ce qu'il faloit prouver.

Theorême quatriéme.

La ſurface d'une pyramide eſt égale à un triangle, dont la hauteur eſt égale à la hauteur de chacune de ſes faces, & dont la baſe eſt égale au circuit de la baſe de cette pyramide, *ou* à un Parallelogramme de même hauteur, dont la baſe eſt la moitié plus petite.

Chacune des faces de la pyramide eſt un triangle, ces faces étant égales, ces triangles ſont égaux entr'eux, & à un triangle rectangle de même hauteur, & dont la baſe eſt égale à toutes les baſes priſes enſemble de ces triangles, *par le Th.* 6 §. 4, *l.* 2, *& par le Th.* 4, § 4, *l.* 2, ce triangle eſt égal à un Parall. de même hauteur dont la baſe eſt moitié plus petite, qui eſt ce qu'il faloit démontrer.

Corollaire premier.

Donc puiſque les cones peuvent être conſiderez comme des pyramides, la ſurface d'un cone eſt égale à un triangle rectangle de même hauteur, que la ſurface du cone, & dõt la baſe eſt égale au circuit de la baſe du cone, *ou*, à un Parallelogramme rectangle de même hauteur, dont la baſe eſt égale à la moitié de la baſe.

Scholie.

La hauteur de la ſurface dv cone & de la pyramide eſt une ligne droite la plus courte qu'on puiſſe concevoir menée ſur la ſurface du ſommet à la baſe.

Corollaire ſecond.

Tout ce qui a donc été démontré des raiſons & des proportions entre pluſieurs rectangles ſemblables, convient aux ſurfaces des cones.

1. Les ſurfaces des cones ſont entr'elles en raiſon compoſée de leur hauteur & de leur baſe.

2. Si la hauteur eſt à la hauteur comme la baſe à la baſe, ces ſurfaces ſeront en raiſon doublée, *par le Th.* 12. § 3. *l.* 3.

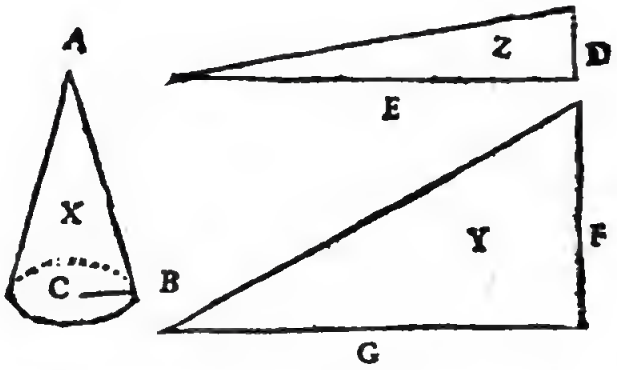
3. Si les deux cones ont leur hauteur ou leur baſe égale, leurs ſurfaces ſeront entr'elles comme les inégales, *par le Th.* 13. § 3, *l.* 3.

4. Donc puiſque les circonferences des cercles ſont entr'elles comme leurs diametres, deux cones ayant même hauteur, leurs ſurfaces ſont entr'elles comme les diametres de leurs baſes.

5. Vn rectangle étant donné, on en peut trouver un, ou pluſieurs ſemblables, qui ayent une telle raiſon avec luy; auſſi un cone étant donné, on peut trouver un ou pluſieurs autres cones auſſi ſemblables, qui ſoient avec le donné en raiſon requiſe.

6. La ſurface du cone X eſt à celle du cercle qui eſt ſa baſe comme ſa hauteur eſt au rayon de ce cercle.

La ſurface de ce cercle eſt égale au triangle rectangle Z dont le côté D eſt égal au rayon BC, & le côté E au circuit du cercle, *par le Th.* 10 § 4. *l.* 2.



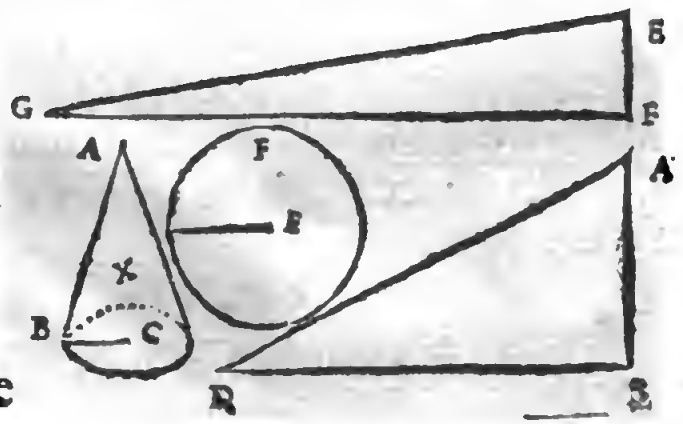
La ſurface du cone X eſt égale au triangle rectangle Y, dont le côté F eſt égal à AB, & le côté G au circuit de ſa baſe, *par le Coroll. du Th. preced.*

G & E étant égaux chacun au circuit du cercle, qui eſt la baſe du cone, ils ſont égaux entre eux, partant les ſurfaces de ces deux triangles rectangles Y & Z, qui ont des baſes égales, ſçavoir G & E, ſont entr'elles comme F à D; mais AB = F, & BC = D: donc X ſurface du cone eſt à celle du cercle de ſa baſe, comme AB eſt à BC: ce qu'il faloit prouver.

Theorême cinquiéme.

La ſurface d'un cercle dont le rayon eſt moyen proportionnel entre la hauteur du cone, & le rayon de la baſe de ce cone, eſt égale à la ſurface de ce cone.

Soit X un cone dont AB eſt la hauteur & BD le circuit du cercle qui eſt ſa baſe, ainſi ſa ſurface eſt égale au rectangle ABD. La ligne BC eſt le rayon de ſa baſe. Je ſuppoſe que EF eſt moyen proportionnel entre AB & BC, & que EF eſt le rayõ d'un cercle dõt FG eſt le circuit, ainſi la ſurface de ce cercle eſt égale



au triangle EFG, par conſequent il n'eſt queſtion que de prouver que ABD ≔ EGF

Par l'hipotheſe AB, EF :: EF, BC : & puiſque les circonferences des cercles ſont entr'elles comme leurs diametres, EF, BC :: FG, BD.

Ainſi EF, BC, :: { AB, EF, FG, BD,

donc AB, EF :: FG, BD,

Donc le rectangle de AB & de BD les extrêmes eſt égal à celuy de EF, & FG les moyens, & par conſequent les triangles ABD, EFG, qui en ſont moitiés, ſeront égaux, ce qu'il faloit prouver.

Theoréme ſixiéme.

Si la hauteur & la baſe d'un Priſme ſont égales à la hauteur & à la baſe d'une pyramide droite la ſurface du Priſme ſera double de celle de la pyramide.

Chaque face du Priſme eſt un Parallelogramme, & chaque face de la pyramide eſt un triangle. Dans le cas propoſé ces Parallelogrammes & ces triangles ſont de même hauteur & ſur même baſe : donc *par le Th. 4. § 4, l. 2.* ces Parallelogrammes ſont doubles de ces triangles; ainſi la ſurface du Priſme eſt double de celle de la pyramide, ce qu'il faloit prouver.

Corollaire.

Donc les cones pouvant être conſide-

rez comme des pyramide, & les cilindres comme des Prifmes ; on peut dire que la ſurface du cilindre eſt double de celle du cone de même hauteur & ſur même baſe.

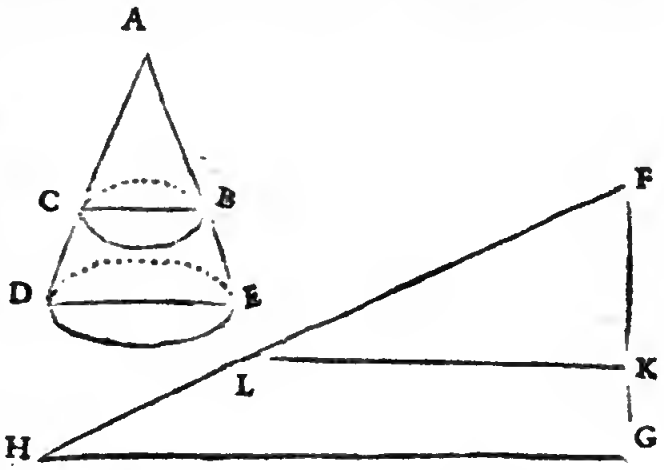
Scholie.

Tout ce que l'on peut démontrer des raiſons des triangles rectangles avec les parallelogrammes, convient aux ſurfaces des cones au regard de celles des cilindres, laquelle raiſon eſt compoſée de celle de leurs hauteurs, & des circonferences des cercles qui ſont leurs baſes.

Lemme premier.

La ſurface de BCDE fragment du cone ADE eſt êgale à celle du Trapeze GHLK.

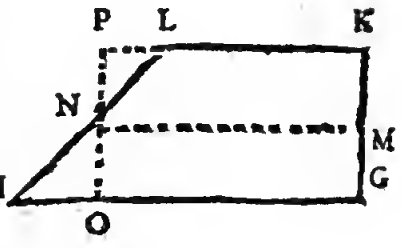
Par le Coroll. 1er du Th. 4e *ſup.* la ſurface du coneAED eſt égale au triangle rectãgle FGH, dont FG = AD & GH égales à la circonference du cercle DE & celle du cone ABC au triangle rectangle FKL dont FK = AB & KL à la circonference du cercle CB: ôtant donc FKL de FGH le reſte GHLK ſera égal au fragment BCDE, ce qui eſt evident.



Lemme ſecond.

Si on coupe les deux côtez KG, LH

par la moitié, en menant la ligne MN paralelle à GH, le Trapeſe KLHG ſera égal à un rectangle fait de KG & MN: la démonſtration en eſt aiſée



Demande.

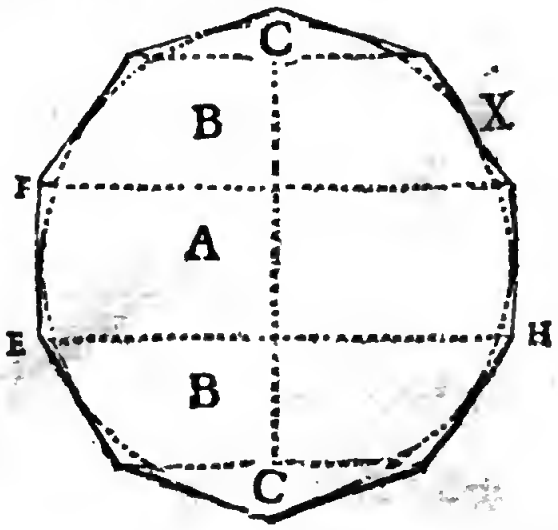
Si l'on joint les angles d'un ſpheroïde comme X, *figure ſuivante*, par des plans perpendiculaires à ſon axe qui le diviſent en pluſieurs parties, ces parties ſeront ou des cones comme C, ou des fragmens de cone, comme B, ou un cilindre comme A.

Theorême ſeptiéme.

Chaque ſurface des portions d'un ſpheroïde eſt égale au rectangle fait de la partie de l'axe à laquelle elle répond, & de la circonference du cercle ou ſphere inſcrite dans ce ſpheroïde.

Pour la partie A.

Quant à la partie A, il n'y a pas de difficulté, puiſque c'eſt un cilindre dont la ſurface, *par le Coroll. 1. Th. 1 ſup.* eſt égale

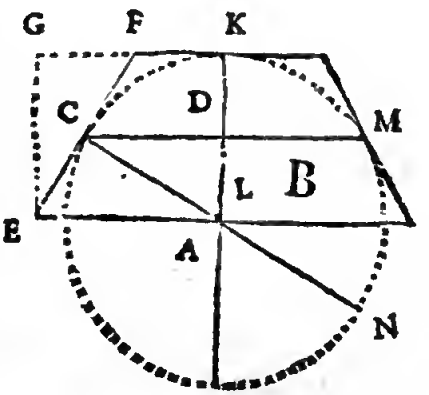


au rectangle de EF par la circonference d'un cercle dont le diametre eſt EH, lequel eſt égal au diametre du cercle ou ſphere inſcrite dans le ſpheroïde X, ce qu'il faloit prouver.

Pour la partie B.

Il faut démontrer que la ſurface de la partie B, qui eſt un fragment de cone, eſt égale à un rectangle fait de K L partie de l'axe du ſpheroïde, à laquelle elle répond, & de la circonference d'un cercle inſcrit audit ſpheroïde, dont CN eſt le diametre.

Je partage ce fragment de cone par la moitié, menãt CM paralelle à FK & à EL: je mene auſſi G E paralelle à KL à laquelle elle eſt égale. Le triangle EFG & ACD ſont rectangles, ainſi GFE & GEF valent un droit, l'angle GFE étans donc égal à l'angle FCD *par le Th.* 8 § 1. *l.* 2. retranchant de l'angle droit FCA, l'angle FCD le reſte DCA ſera égal à GEF, ainſi les deux triangles ACD & EFG ſont equiangles donc GE ou KL, EF :: CD, CA ; partant KL eſt à EF comme le double de CD qui eſt CM eſt

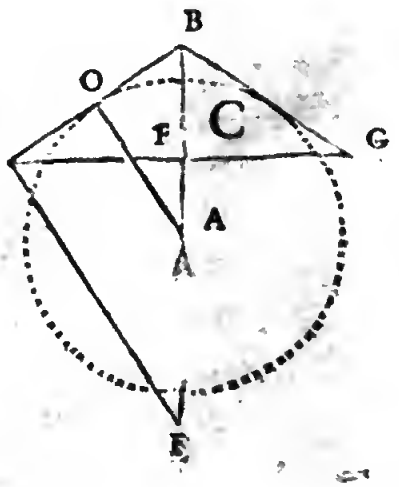


au double de AC, qui eſt CN : or *par le Th. 4 § 2. l. 3* les lignes CM, CN priſes cõme diametres, ſont entr'elles cõme les circõferences des cercles dont elles ſont diametres: donc le rectangle fait de GE & de la circonference d'un cercle dont CN eſt le diametre, eſt égal au rectangle fait de EF & de la circonference d'un cercle dont CM eſt diametre, auquel eſt égale la ſurface de B fragment de cone, *par le Lemme precedant*, ce rectangle, dis-je, eſt égal à un rectagle fait de KL par la circonference d'un cercle, dont CN eſt le diametre ; ce qu'il faloit prouver.

Pour la partie C.

De O moitié de BD côté du cone C je mene une ligne à A centre du cercle qui eſt inſcrit dans le ſpheroïde, une ligne AO, & par D une paralelle à AO, ainſi comme BO eſt moitié de BD, AO ſera moitié de DF, partant DF ſera le diametre du cercle inſcrit dont AO eſt le rayon.

La ſurface du cone C, ou, DBG, *par le Cor. 1. Th. 4. ſup.* eſt égale à un triangle rectangle dont BD eſt la hauteur, & la baſe un cercle dont DG eſt le diametre; partant à un



Paralellogramme rectangle dont BD eſt la hauteur, & la baſe eſt la circonference d'un cercle, dont DE moitié de DG eſt le diametre; ainſi il faut prouver que le rectangle de BD par la circonference du cercle dont DE eſt diametre, eſt égal au rectangle de BE par la circonference du cercle dont DF eſt le diametre.

Les deux triangles DEF & DEB ſont ſemblables, *par le Lem.* 4. § 1, *l.* 3, donc BD, BE :: DF, DE : or DF eſt à DE, cõme les circonferences des cercles dont ils ſont les diametres, partant le rectangle de BE par la circonference du cercle dont DE eſt le diametre, eſt égal au rectangle de BD par la circonference du cercle dont DE eſt le diametre, ce qu'il faloit prouver.

Theorême huitiéme.

La ſurface d'un ſpheroïde eſt égale au rectangle fait de ſon axe par la circonference du cercle, ou ſphere qui luy eſt inſcrite.

Par le Th. precedant; puiſque la ſurface de chaque partie du ſpheroïde eſt égale au rectangle faite de chaque partie de ſon axe à laquelle elle répond, & de la circonference du cercle ou ſphere, qui luy eſt inſcrite, toute la ſurface entiere ſera égale au rectangle de tout l'axe par la circonference du cercle ou ſphere qui

luy eſt inſcrite, puiſque le tout & ſes parties ſont un produit égal quand ils ſont multipliez par une même grandeur, comme on a démontré ; *l. 2. Grand. prop.* 2e

Theorême neufiéme.

La ſurface d'une ſphere eſt égale au rectangle de ſon axe par la circonference d'un cercle qui a même diametre que cette ſphere.

Par la definition 9 § 2, ſup. la ſphere eſt formée par la revolution d'un demy cercle, ſur ſon diametre comme axe: or *par le T. 9 & 10, § 4, l. 2.* le cercle peut être cõſideré comme un Polygone regulier d'une infinité de côtez; ainſi par la definition du ſpheroïde la ſphere eſt un ſpheroïde d'une infinité de cercles, dont l'axe par conſequent eſt égal à l'axe ou diametre de la ſphere, ainſi puiſque par le prec. Th. la ſurface du ſpheroïde eſt égale au rectangle fait de ſon axe par la circõference d'un cercle dont le diametre eſt celuy de la ſphere qui luy eſt inſcrite, la ſurface de cette ſphere ſera égale de même au rectangle fait de ſon axe & de la circonference d'un cercle qui a même diametre que cette ſphere, ce qu'il faloit démontrer.

Theorême dixiéme.

La ſurface d'une ſphere eſt égale à celle du contour d'un cilindre où elle eſt

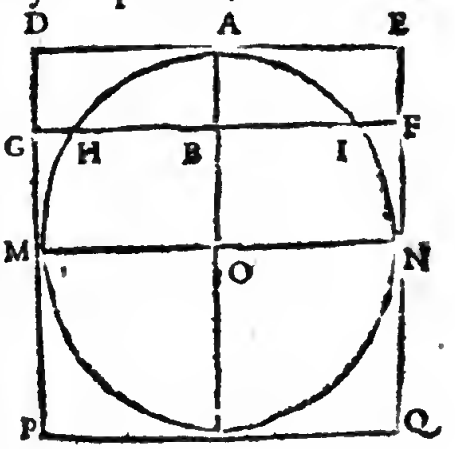
inſcrite, qui a même hauteur que ſon axe.

Figure ſuivante.

La ſurface de la ſphere AMNC eſt égale à un rectangle fait de ſon axe par la circonferẽce du cercle fait ſur ſon diametre MN, or la ſurface du cilindre ou cette ſphere eſt inſcrite dont les côtez DP, EQ ſont égaux à AC, l'axe de cette ſphere eſt égale à ce même rectangle ; car *par le Coroll.* 1, *Th.* 1. *ſup.* elle eſt égale au rectangle fait de PD par la circonference du cercle de ſa baſe qui a pour diametre PQ égal à MN ; puiſque le diametre d'une ſphere inſcrite dans un cilindre doit être égal à celuy de la baſe du cilindre, ſelon l'idée qu'on a des figures inſcrites.

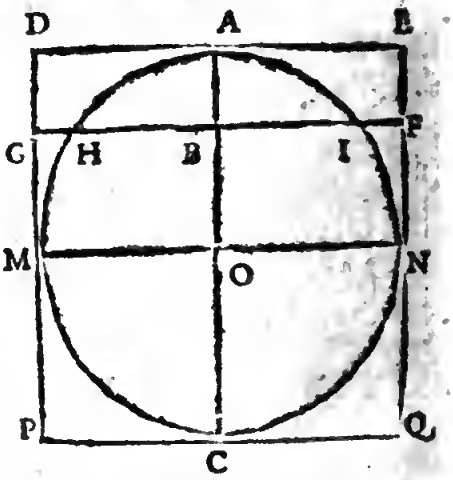
Theoréme onziéme.

Si on coupe une ſphere inſcrite dans un cilindre par des plans perpendiculaires à ſon axe, la ſurface de chaque partie de la ſphere eſt égale à celle de la partie du cilindre qui luy répond.



A C axe de la ſphere eſt la hauteur du cilindre où la ſphere eſt inſcrite, ainſi ce cilindre touche par ces deux baſes cette ſphere. Je coupe l'axe AC

par des plans perpendiculaires ſur luy qui coupe auſſi le cilindre. Je dis que la ſurface de la partie MHIN eſt égale à celle de la partie MGFN du cilindre ; comme auſſi la ſurface de HAI à celle de EFGD.



Car on peut prendre cette ſphere pour un ſpheroïde, ainſi la partie MHIN & HAI pour des portiõs de ſpheroide. Ainſi *par le Th. 7 ſup.* la ſurface de MHIN, eſt égale au rectangle BO par la circonference d'un cercle dont MN eſt le diametre, auquel rectangle, *par le Cor. 1. du Th. 1 ſup.* eſt égal, la ſurface de FGMN: de même la ſurface de HAI eſt égale au rectangle de AB par la circonference d'un cercle dont GF eſt le diametre ; auquel eſt égale la ſurface de la partie DEFG, *par le Coroll. 1 du Th. cy-deſſus allegué.*

Problême premier,

Couper une ſphere par un plan, de ſorte que les ſurfaces des portions de la ſphere ſoient en raiſon donnée.

Il faut inſcrire la ſphere dans un cilindre, en ſuite couper les côtez de ce cilindre, ſelon la raiſon donnée & mener par les

les points de cette ſection des lignes ou des plans paralelles qui couperont la ſphere ſelon la raiſon donnée ; car les ſurfaces des portions de la ſphere, compriſes entre ces paralelles, ſeront égales à celles des portions du cilindre auſquelles elles répondront, *par le Th. 11 ſup.*

Scholie.

Ie ne parle point des raiſons qui ſe peuvent obſerver entre la ſurface du cone & de la ſphere. I'en ay aſſez dit pour des Elemens. Ce que je ne dis pas peut ſe déduire facilement de ce que j'ay expliqué.

Theorême douziéme.

La ſurface d'une ſphere eſt quatre fois plus grande que celle de ſon plus grand cercle.

Concevons une ſphere dans un cilindre, dont la baſe par conſequent ſera égale au plus grand cercle de la ſphere, & ſa hauteur ſera le diametre du cercle; par conſequent, *ſelon le Coroll. 2, Th. 2, ſup.* le contour de ce cilindre ſera quatre fois plus grand que la ſurface de ce cercle: or *par le Th. 10 ſup.* la ſurface de la ſphere eſt égale à ce contour ; donc elle eſt quatre fois plus grande que celle de ſon plus grand cercle.

Theorême treiziéme.

La ſurface d'une ſphere X eſt égale à celle d'un cercle que je nomme Z, dont le ra-

yon eſt égal au diametre de ſon plus grãd cercle, *ou, ce qui eſt la méme choſe*, ſi le diametre du plus grand cercle de la ſphere X eſt 1, & celuy du cercle Z eſt 2, la ſurface de X eſt égale à celle de Z.

1° Les ſurfaces des cercles étant entr'elles, *par le Cor. du Th.* 18, *l.* 3, § 3, comme les quarrez de leurs diametres, puiſque le quarré de 1 eſt 1, & que celuy de 2 eſt 4, ſelon l'hipotheſe la ſurface de Z ſera quadruple de celle du plus grand cercle de la ſphere X: or la ſurface de cette ſphere eſt quadruple de celle de ſon plus grand cercle, par le Theor. preced, donc elle ſera égale à celle de Z. Ce qu'il faloit prouver.

Theorême quatorziéme.

La ſurface entiere d'un cilindre, *c'eſt à dire*, tant de ſon contour que de ſes deux baſes, eſt à celle d'une ſphere à laquelle il eſt circonſcrit, en raiſon ſeſquialtere.

1° *Par le Th.* 10 *ſup.* le ſeul contour du cilindre eſt egal à la ſurface de la ſphere.
2° Chaque baſe de ce cilindre eſt le plus grand cercle de la ſphere, qui eſt la 4ᵉ partie de ſa ſurface, *par le Th.* 12 *ſup.* ainſi les deux baſes du cilindre ſont la moitié de la ſurface de la ſphere.

Partant toute la ſurface du cilindre eſt égale, 1° à une fois toute la ſurface de la ſphere ; 2° à la moitié de cette ſurface ; ainſi cette raiſon eſt ſeſquialtere, c'eſt à dire, comme 3 à 2.

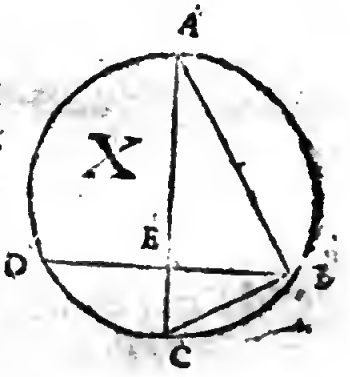
Scholie.

Nous avons enſeigné, *probl* 3. § 3. *l.* 3, cõment on trouve des cercles qui ſoient dans une raiſon dõnée, ainſi on voit comment on peut trouver deux ou pluſieurs ſpheres qui ayent entr'elles une raiſon propoſée.

Theorême quinzième.

La ſurface de la portion D A B de la ſphere X eſt égale à celle d'un cercle dont AB eſt le rayon, comme celle de BCD à celle du cercle dont B C eſt le rayon.

Le quarré de AC eſt égal aux quarrez de AB & de BC, donc la ſurface du cercle dont AC eſt le rayon, eſt égale aux ſurfaces de deux cercles, dõt AB & BC ſont les rayons, puiſque les ſurfaces des cercles ſont cõme les quarrez de leurs rayons ou de leurs diametres.



Or, *par le Th.* 13e *ſup.* le cercle dont AC eſt rayon, a ſa ſurface égale à celle de la ſphere X; ainſi cette ſurface eſt é-

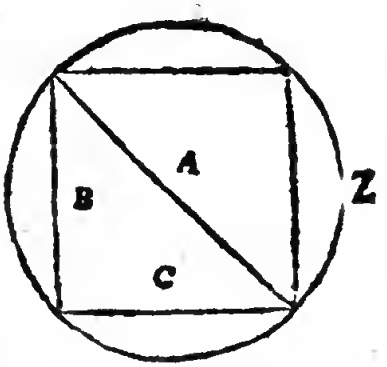
gale à celle des deux cercles dont AB & BC ſont les rayons.

Reſte à démontrer que la ſurface de la portion DAB eſt à celle de BCD, comme le quarré de AB à celuy de BC.

Ayant inſcrit la ſphere X dans un cilindre de même hauteur que cette ſphere, la ſurface de la portion DAB ſera égale, *par le Probl 1. ſup.* au contour de la partie du cilindre qui luy répond, comme celle de BCD. à l'autre partie du cilindre. Les contours de ces deux parties ſont entr'eux comme AE & EC : or les quarrez ſur AB & BC ſont auſſi, *par le Th. 16. §. 3. l. 2.* comme AE à EC ; donc les ſurfaces des portions de cette ſphere ſeront entr'elles comme ces deux quarrez.

Theoréme ſeiziéme.

La ſurface d'une ſphere eſt double de celle du contour du cilindre qui luy eſt inſcrit, & dont la hauteur eſt égale au diametre de ſa baſe.



La ſurface de la ſphere Z eſt quadruple de celle du cercle dont A eſt le diametre, *par le Th. 12 ſup.*

La ſurface du cercle dont A eſt le diametre, eſt égale à la ſurface des cer-

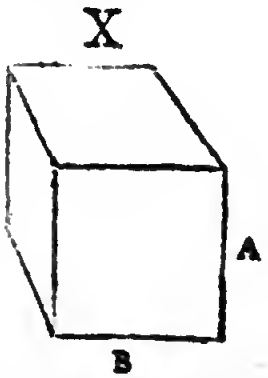
cles dont C & B ſont les diametres, puiſque ces ſurfaces ſont comme les quarrez de leurs diametres, & que A A = CC+BB : or C = B ; ainſi la ſurface du cercle dont A eſt le diametre, eſt égale à deux fois celle du cercle dont C eſt le diametre, & par conſequent puiſque la ſurface de A eſt la 4e partie de la ſurface de la ſphere Z, celle du cercle dont C eſt le diametre, ſera la huitiéme partie de celle de la ſphere Z : la ſurface de ce même cercle dont C eſt diametre, eſt la 4e partie du contour de ce cilindre inſcrit, *par le Coroll. 2. du Th. 2. ſup.* donc ce contour eſt la moitié de la ſurface de la ſphere Z.

SECTION IV.

De la ſolidité des Solides.

Lemme premier.

LA Solidité d'un Parallelipipede rectangle eſt faite par la multiplication de ſes trois dimenſions, ou de ſa hauteur multipliée par ſa baſe.



Le Solide X eſt fait de ſurfaces planes, égales chacune à la ſurface de la baſe, & poſées directemẽt les unes ſur les autres ; ainſi il eſt vray de

dire que cette baſe eſt autant de fois dans le ſolide X, que ſa hauteur A contient de parties. En multipliant donc la baſe B par la hauteur A, on aura une grandeur égale au ſolide X, ainſi on peut dire que le ſolide X eſt fait par la multiplication de ſa baſe B, par ſa hauteur A.

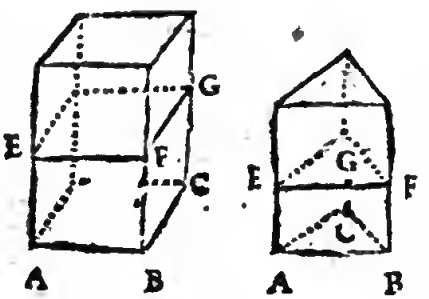
Lemme ſecond.

Deux ſolides de même baſe, ou de baſes ſemblables & égales, & de même hauteur, dont les côtés ſont les mêmes angles, ſont égaux.

Cela eſt clair; car ſi par la penſée on les met l'un dans l'autre, il faut qu'ils conviennent en tout.

Lemme troiſiéme.

Toutes les ſections d'un priſme paralelles à la baſe, ſont égales & ſemblables à la baſe.



Le plan ou la ſection EFG eſtāt paralelle à ABC, il faut que EF ſoit paralelle à AB, & FG à BC; mais les lignes paralelles entre mémes paralelles ſont égales, donc les côtez du plan qui coupe le priſme

ſont égaux à ceux de la baſe du priſme: or *par le Th.* 16. § 1, *ſup.* l'angle EFG eſt égal à l'angle ABC, ainſi des autres, partant les plans ABC & EFG ayant les côtez égaux, & les angles que ces côtez comprennent égaux, ils ſont égaux & ſemblables.

Premiere demande.

On peut ſuppoſer que tout ſolide eſt fait d'un nombre infiny de plans, qui ayant quelque épaiſſeur, mais inſenſible, ſont poſés paralellement les uns ſur les autres.

Scholie.

Cette ſuppoſition ne peut être conteſtée par ce nombre infiny, je n'entans qu'un grand nombre.

Seconde demande.

Si deux ſolides ont même hauteur, & que les plans qui les compoſent ſoient également épais, l'un & l'autre auront un égal nombre de plans.

Theorême premier.

Les priſmes de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes.

Deux priſmes cõme Z & X qui ont même hauteur, ou qui ſont entre deux plans paralelles, ſelon la 1re demande, peuvent être cõſiderez cõpoſez de plans paralel-

les, dont ils contiennent un égal nombre, *ſelon la 2e demande :* or *par le Lem.* 3. tous ces plans ſont égaux chacun au plan de leur baſe, par conſequent ſi Z & X ont des baſes égales ils ont un égal nombre de plans égaux, ainſi ils ſont égaux. Si la baſe de Z eſt le tiers de celle de X, tous les plans de Z ſeront le tiers de ceux de X, ainſi Z ſera le tiers de X.

Corollaire premier.

Donc la ſolidité d'un priſme n'eſt pas plus grande lors qu'il a une plns grande ſurface.

Car deux priſmes entre deux plans paralelles ſont égaux, s'ils ont leurs baſes égales, quoyque les côtez de l'un ſoient obliques, & par conſequent plus grands, & qu'ainſi il ait une plus grande ſurface.

Corollaire ſecond.

En meſurant un priſme, s'il eſt oblique, il le faut rapporter à un priſme droit de même hauteur, ou qui puiſſe être compris entre deux plans paralelles.

Car celuy qui eſt droit eſt égal à celuy qui ne l'eſt pas, quoyque la ſurface du droit ſoit plus petite.

Corollaire troiſiéme.

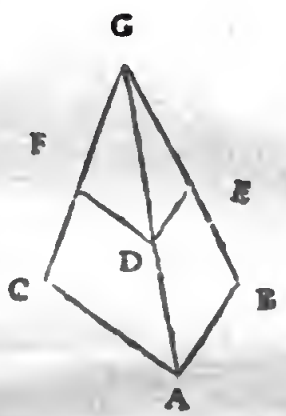
Les cilindres ſont des priſmes d'une infinité de côtez; ainſi deux cilindres qui ont même baſe, & qui peuvent être com-

pris entre mêmes paralelles ſont égaux, quoyque l'un ſoit droit & l'autre oblique.

Lemme quatriéme.

Toute ſection d'une pyramide qui ſe fait paralellement à ſa baſe, eſt ſemblable à ſa baſe.

Le plan FDE eſt paralelle à la baſe ABC, ainſi DE eſt paralelle à AB & DF à AC. *Par le Th.* 16, § 1. *ſup.* l'angle CAB eſt égal à l'angle EDF, ainſi les angles de la ſection EDF ſont les mêmes que ceux de la baſe ABC, & outre cela tous les côtez ſont proportionaux, car dans les triangles GAC GAB *par le Th.* 4, § 1. *l.* 3.



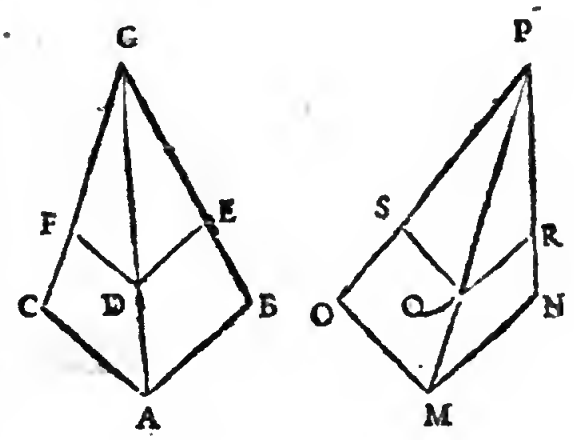
$$GD.\ GA :: \begin{cases} FD,\ CA \\ DE\ \ AB \end{cases}$$

Donc *par le Th.* 5. *l.* 2, § 2, FDE eſt ſemblable à CAB.

Lemme cinquiéme.

Si on coupe deux pyramides de même hauteur, ou qui ſoient entre des plans paralelles, par des plans paralelles à leurs baſes, les ſections de l'une ſeront à celle de l'autre qui eſt en même hauteur, comme la baſe de l'une eſt à la baſe de l'autre.

Soient deux pyramides BACG & NMOP entre des plans paralelles, & par conſequent de même hauteur, les plans FDE & SQR ſont paralelles aux baſes de ces pyramides, & à la même hauteur, il faut prouver que ſi les baſes ſont égales, les ſections ſont égales.



Par le Lemme preced. ces ſections ſont ſẽblables à leurs baſes, ainſi il ſuffit de démontrer que MN, QR :: AB, DE, car deux figures ſemblables ſont entr'elles en raiſon doublée de leurs côtez omologues.

Soit nommé T la hauteur de ces pyramides qui eſt la même, & V la hauteur des plans qui les coupe, qui eſt encore la même.

MN, QR :: PM, PQ
AB, DE :: GA, GD } :: T V,

Donc, puis que deux raiſons égales à une 3e ſont égales entr'elles, MN, QR :: AB, DE, ce qu'il falloit prouver.

Theoréme ſecond.

Les pyramides de même hauteur

ſont entr'elles comme leurs baſes.

1° Par la premiere demande deux pyramides peuvent être conſiderées comme compoſées de plans poſez paralellement les uns ſur les autres. 2° Par la 2e demande deux pyramides de même hauteur ont égal nombre de ces plans paralelles.

Il ne reſte donc qu'à prouver que tous les plans dont ces pyramides ſont compoſées, & qui ſe répondent ou ſont à la même hauteur, ſont entr'eux comme leurs baſes ; ce qui a été prouvé dans le dernier Lemme : Ainſi ſi les baſes ſont égales, ces deux pyramides ſont égales, puis que tous les plans pris à la même hauteur dans l'une & dans l'autre ſont êgaux; ſi la baſe de l'un eſt le tiers de la baſe de l'autre, comme chaque plan de l'un pris à la même hauteur, ſera le tiers de l'autre, l'une de ces pyramides ſera le tiers de l'autre. Donc les pyramides de même hauteur ſont comme leurs baſes.

Corollaire premier.

Donc la ſolidité d'une pyramide ne depend pas de la grandeur de ſes côtez.

Car une pyramide qui n'eſt pas droite, à plus de ſurface qu'une de même hauteur qui eſt droite, & cependant ſi leurs baſes ſont égales elles ſont égales.

Corollaire ſecond.

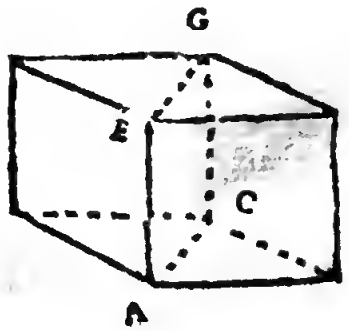
Donc en meſurant une pyramide, ſi elle n'eſt pas droite, il la faut rapporter à une qui le ſoit, & qui ait la même hauteur, puis que celle qui n'eſt pas droite n'eſt pas plus grande que celle qui eſt droite.

Corollaire troiſiéme.

Les Cones ſont des Pyramides d'une infinité de côtez, donc tous ceux qui ſont de même hauteur, droits ou non droits, ſont entr'eux comme leurs baſes.

Theorême troiſiéme.

Si on coupe le Pararellipipede X par un plan, ſelon la diagonale AC ou EG : il ſera coupé en deux priſmes triangulaires égaux.

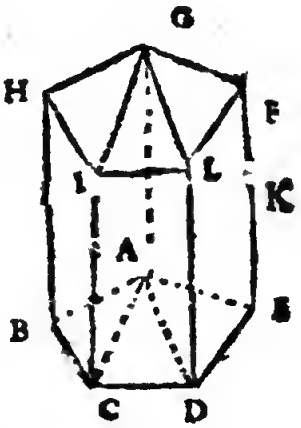


X

1° Les deux parties de X ont leurs baſes égales, elles ont même hauteur & mêmes angles; donc, *par le Lem. 2 ſup.* elles ſont égales. 2° Pour démontrer que ce ſont deux priſmes triangulaires, il ne faut que rapporter la definit. de ces ſolides qui leur convient.

Theorême quatriéme.

Tout priſme polygone peut être diviſé en priſmes triangulaires.



Soit K un priſme polygone dont les baſes ſont ABCDE, & GHILF : ces baſes polygones ſe reduiſent en triangles. Par la definition des priſmes triangulaires, les ſolides ABCGHI. ACDGIL. ADECLF. ſont des priſmes triangulaires; donc le priſme K peut être diviſé en priſmes triangulaires.

Theorême cinquiéme.

Vn priſme eſt égal à pluſieurs priſmes de même hauteur, ſi ſa baſe eſt égale à celles de tous ces priſmes. Il en eſt de même des pyramides.

Car concevant dans ces ſolides des plans paralelles à la baſe. 1° Par la 2e demande *ſup.* il y aura un égal nombre de plans dans chacun. 2° Selon la maniere que nous avons demontré, les Th. premier & ſecond *ſup.* chaque plan dans le grand priſme ſera égal à tous les plans qui ſeront dans les autres priſmes; car il leur ſera comme ſa baſe eſt à tou-

tes les baſes de ces priſmes, or elle leur eſt égale, donc &c. Il en eſt de méme des pyramides.

Theoreme ſixiéme.

Les cilindres de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes.

Les cilindres ſont des priſmes d'une infinité de côtez: Or *par le Th. 1. ſup.* les priſmes de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes. Donc les cilindres, &c.

Theoréme ſeptiéme.

Vn cilindre eſt égal à un priſme triangulaire de même hauteur, dont la baſe eſt égale à la ſienne.

Vn cilindre eſt un priſme poligone, tout priſme poligone peut être diviſé en priſmes triangulaires, par le Theor. 4e *ſup.* qui par le Theor. 5e *ſup.* ſeront égaux à un ſeul priſme triangulaire de même hauteur, dont la baſe eſt égale à toutes celles de ces priſmes. Partant le cilindre égal à ce priſme polygone, l'eſt à ce priſme triangulaire qui a même hauteur, & dont la baſe eſt égale à la ſienne.

Corollaire.

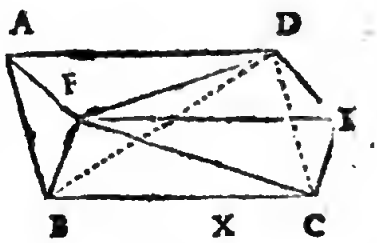
Donc un cilindre X eſt égal à pluſieurs cilindres A, B, C, &c. de même hauteur, dont toutes les baſes priſes enſemble ſont égales à la ſienne.

Car tous ces cilindres ſeront égaux à autant de priſmes triangulaires, qui ont même hauteur & baſes égales. Celuy auquel X. eſt égal, & partant de même hauteur, & ſur baſe égale, par le Theor. 5. eſt égal à tous ces autres priſmes triangulaires, & partant aux cilindres A, B, C, &c. dont toutes les baſes ſont égales à celle de X, partant X eſt égal à A, B, C, &c.

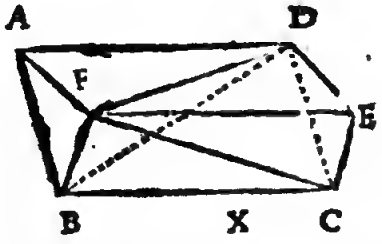
Theoréme Huitiéme.

Vn priſme triangulaire ſe diviſe en trois pyramides triangulaires égales.

Soit X, un priſme triangulaire, je méne ſur chacune de ces trois faces des diagonales, qui feront ſix triangles par le Th. 1. §. 4. l. 2. donc les triangles BAD, & BDC étant égaux, les pyramides BADF, & BDCF, qui ont méme ſommet, & partant méme hauteur, ſont égales par le Theor. 2e *ſup.* Ayant ôté par la penſée de ce priſme X, ces deux pyramides, il en reſte une troiſiéme, ſçavoir, FCED, laquelle a premierement même ſommet, ſçavoir, D, & partant même hauteur



que la pyramide FBCD, elles ont des baſes égales, ſçavoir les triangles égaux FBC & FCE, donc elles ſont égales; or la pyramide FBCD eſt la même que BDCF eſtant formée par les mêmes triangles. Donc FCED, & BADF ſeront égales, entre elles, étant égales à une troiſiéme, ainſi X ſera diviſé en trois pyramides égales qui ſont BADF, BDCF, & FCED.



Theoreme neuviéme.

Vne pyramide polygone ſe peut diviſer en pyramides triangulaires.

Ce Theoréme ſe demontre facilement, car la baſe d'une pyramide poligone eſt un poligone, qui par conſequent ſe reduit en triangles, ſur leſquels concevant des plans élevez le long des côtez de cette pyramide juſques à ſon ſommet, on aura pluſieurs pyramides triangulaires, qui ſeront les parties de la pyramide poligone.

Theoréme dixiéme.

Toute pyramide poligone eſt le tiers de tout priſmes de même hauteur, & qui eſt ſur même baſe, ou ſur baſe égale.

Car

Car ayant reduit en triangles l'une & l'autre baſe de ces deux ſolides, la pyramide polygone ſera diviſée en pyramides triangulaires, & le priſme polygone en priſmes triangulaires: or *par le Th 8 ſup.* chacune de ces pyramides triangulaires ſera le tiers de chacun de ces priſmes triangulaires ; ainſi toute la pyramide polygone ſera le tiers de tout le priſme polygone.

Theorême onziéme.

Un cone eſt le tiers d'un cilindre de même hauteur ſur baſes égales.

Un cone eſt une pyramide d'une infinité de côtez: or une pyramide eſt le tiers, *par le Th.* 10 *ſup.* d'un priſme de même hauteur qui a une baſe égale ; donc le cone eſt auſſi le tiers d'un cilindre de même hauteur, & ſur même baſe, ou baſe égale, puiſque un cilindre eſt un priſme d'un nombre infini de côtez.

Theorême douziéme.

Un cone eſt égal à tous les cones de même hauteur, dont les baſes priſes enſemble ſont égales à la ſienne.

Ces cones ſont des pyramides, ainſi ce Th. n'eſt pas different du Th. 5 *ſup.*

AVERTISSEMENT.

IL eſt evident que la grandeur d'un ſolide depend de ſes trois dimenſions, c'eſt à dire, *de ſa longueur, de ſa largeur, & de ſa hauteur. La ſolidité d'un parallelipipede, comme on a dit* lemme premier ſup. *eſt faite par la multiplication de ſa baſe par ſa hauteur & ſa baſe, depend de la longueur de ſes côtez. La ſolidité d'un cilindre depend de ſa hauteur & de ſa baſe; comme auſſi celle du cone; & puiſque la baſe de l'un & de l'autre, eſt un cercle dont la ſurface depend du diametre, pour connoiſtre la ſolidité d'un cilindre & d'un cone, il faut conſiderer ſa hauteur & la circonference & le diametre du cercle qui eſt la baſe. Ce ſont là leurs trois dimenſions. On peut dire auſſi que la ſolidité d'une ſphere depend de trois dimenſions, ſçavoir 1° De ſon diametre. 2° De ſon plus grand cercle. 3° De ſon rayon en la maniere qu'on le va dire au Th. 17e qui ſuit.*

Dans le traitté de la Grandeur on a appellé racines *d'un ſolide ce qu'on nomme icy* dimenſion.

Theorême treiziéme.

Les parallelipipedes & les priſmes dont les côtez ſont les mêmes angles, ſont en raiſon compoſée des raiſons de leurs trois dimenſions.

S'ils ſont rectangles, la choſe eſt claire ; car *par le Lem.* 1. leur ſolidité dépend de la multiplication de leurs dimenſions; donc *par la definition des raiſons compoſées, & par la propoſ* 8 *l.* 4 *Grand.* la raiſon qu'ils ont entr'eux eſt compoſée de celle de leurs trois dimenſions.

S'ils ne ſont pas rectangles, mais qu'ils ſoient ſemblables, la même choſe arrive, car par le *Theor.* 3. § 1 *l.* 3 leurs côtez étant également inclinez, ils ſont entr'eux comme les perpendiculaires de leur hauteur : Or les raiſons compoſées d'égales raiſons ſont égales ; donc ces ſolides ſemblables, ſont en raiſon compoſée des raiſons de leurs trois dimenſions.

Corollaire premier.

Les cilindres dont les axes ſont également inclinez, ſont entr'eux en raiſon compoſée de leurs dimenſions.

Corollaire ſecond.

Les pyramides dont les axes ſont également inclinez, ſont en raiſon compoſée des raiſons de leurs trois dimenſions.

Cela eſt evident, car elles ſont le tiers des Priſmes qui ſont ſur leurs baſes, & qui ont même hauteur.

Corollaire troiſiéme.

Les cones dont les axes ſont également inclinez, ſont entr'eux en raiſon compoſée des raiſons de leurs dimenſions.

C'eſt une ſuite, car les cones ſont des pyramides.

Theorème quatorziéme.

Les parallelipipedes ſemblables ſont en raiſon triplée des raiſons de leurs trois dimenſions; ainſi de tous les autres ſolides ſemblables.

Elles ſont en raiſon compoſée par le *prec. Theor.* des trois raiſons de leurs trois dimenſions. Or ces raiſons ſont égales, donc la raiſon qu'elles compoſent, par par la definition de la raiſon triplée, eſt triplée.

Theorême quinziéme.

Les cilindres ſemblables, ſont entr'eux

comme les cubes des diametres de leurs baſes.

Ils ſont en raiſon triplée de chacune de celles de leurs trois dimenſions, *par le Th. prec.* & par conſequent de la raiſon des diametres de leurs baſes : Or les cubes de leurs diametres ſont en raiſon triplée de celle de ces mêmes diametres : Donc puiſque les raiſons compoſées d'égales raiſons, ſont égales, les cilindres ſemblables ſont entr'eux comme les cubes des diametres de leurs baſes. Il en eſt de même des cones ſemblables, & ſe démontre de la même maniere.

Theoréme ſeziéme.

Si les parallelipipedes, dont les côtés ſont les mêmes angles, ont une ou deux de leurs dimenſions égales, ils ſeront entr'eux comme l'inegale. Il en eſt de même des priſmes, des pyramides, des cilindres & des cones.

Ces ſolides ſont en raiſon compoſée de leurs dimenſions, donc *par la prop. 6 du l. 4. grand.* S'ils ont quelqu'une de leurs dimenſions égales, & les autres inegales, ils doivent eſtre entr'eux comme l'inégale : Ainſi, par exemple, ſi deux cilindres ou deux cones ſont de même hauteur, ils ſeront comme leurs baſes.

Thoréme dix-ſeptiéme.

Vne ſphere eſt égale à un cone, ou

pyramide polygone, qui a pour axe le rayon de cette ſphere, & pour baſe un cercle, dont le rayon eſt le diametre de cette même ſphere.

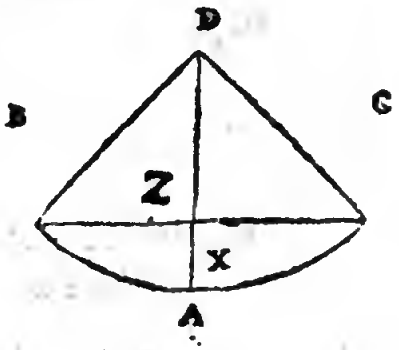
1° En concevant une infinité de cones ou de pyramides poligones, dont le ſommet eſt dans le centre d'une ſphere, & les baſes dans la ſurface de la même ſphere; il eſt evident qu'on peut dire que la ſolidité de cette ſphere eſt égale à tous ces cones, ou pyramides poligones puiſque c'eſt dire que le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

2° Tous ces cones, par le *Theor.* 12e *ſup.* ſont égaux à un cone qui a même hauteur, à ſçavoir le rayon de cette ſphere, & pour baſe toute la ſurface de cette ſphere qui eſt égale aux baſes de ces cones.

3° Or la ſurface de cette ſphere eſt égale à celle d'un cercle qui a pour rayon le diametre de cette ſphere, *par le Theor.* 13e §. 3. *ſup.* donc la ſolidité eſt égale à celle d'un cone, dont la baſe &c.

Corollaire premier.

Donc le ſecteur ABDC d'une ſphere eſt égal à un cone, qui a pour hauteur le rayon AB de cette ſphere, & pour baſe la ſurface de ce ſecteur.



Cette ſurface, *par les* 11. *&* 15. *Th* §. 3. *ſup.* eſt connuë, ainſi on connoiſtra la ſolidité de ce ſecteur, connoiſſant qu'il eſt égal à un cone dont la baſe & la hauteur ſont connuës.

Corollaire ſecond.

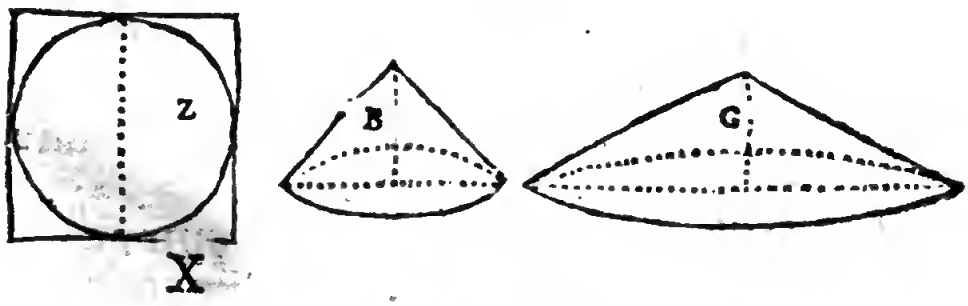
Donc la ſolidité d'un ſegment de ſphere tel qu'eſt égale BCD ou X eſt égale à celle du ſecteur ABDC, moins le cone Z ou ABC.

Ainſi pour avoir la quantité de X, il faut *par le Cor. preced.* chercher la valeur de tout ce ſecteur ABDC, & en retrancher le cone Z, dont BC eſt la baſe, & AE l'axe.

Theorême dix-huitiéme.

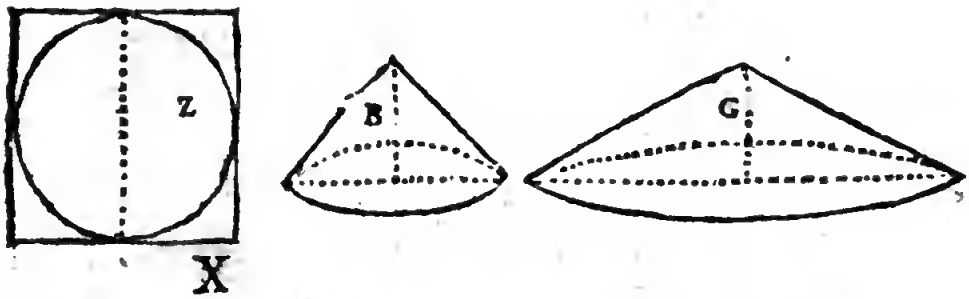
La raiſon de X cilindre à la ſphere Z qui luy eſt inſcrite, eſt ſeſquialtere.

Soient B & C deux cones qui ayent pour axe le rayon de la ſphere Z, & que le rayon de la baſe de B ſoit celuy de la ſphere Z, & le rayon de la baſe de C ſoit



l'axe ou le diametre de la méme ſphere Z alors *par le Coroll.* 3e *du Th.* 2e *ſup.* ces deux cones B & C ſeront comme leurs baſes:

or celle de C eſt quadruple de celle de B; donc le cone C eſt quadruple du cone B; ainſi B, C :: 1, 4, Le plus petit cone B eſt la ſixiéme partie du cilindre X, qui a pour baſe le grand cercle de la ſphere Z, & pour axe le diametre, car, *par le Th. 11. ſup.* ce cone B eſt le tiers d'un cilindre qui a même baſe que luy, & même axe; par cõſequẽt il eſt la 6ᵉ partie d'un cilindre qui



a même baſe, & un axe deux fois plus grand; ainſi X, B :: 6, 1. *Par le Th. 18, ſup.* le cone C eſt égal à la ſphere Z : on a prouvé que B, C :: 1, 4; aïnſi B, Z :: 1, 4, donc puiſque le cilindre X vaut ſix parties telles que la ſphere Z en vaut quatre X, Z :: 6, 4; ce qui eſt une raiſon ſeſquialtere.

Theoréme dix-neufiéme.

Les ſpheres ſont entre elles comme les cubes de leurs diametres.

Les ſpheres ſont en raiſon compoſée des raiſons de leurs trois dimenſions, toutes les ſpheres ſont ſemblables; ainſi leurs trois dimenſions ont même raiſon: Donc la raiſon qu'elles compoſent eſt

triplée de chacune des raiſons de leurs dimenſions, par exemple, de celle de leurs diametres. Or les cubes de ces diametres ſont en raiſon triplée de celle de ces diametres; donc les ſpheres ſont entre elles comme le cubes de leurs diametres,

SECTION V.

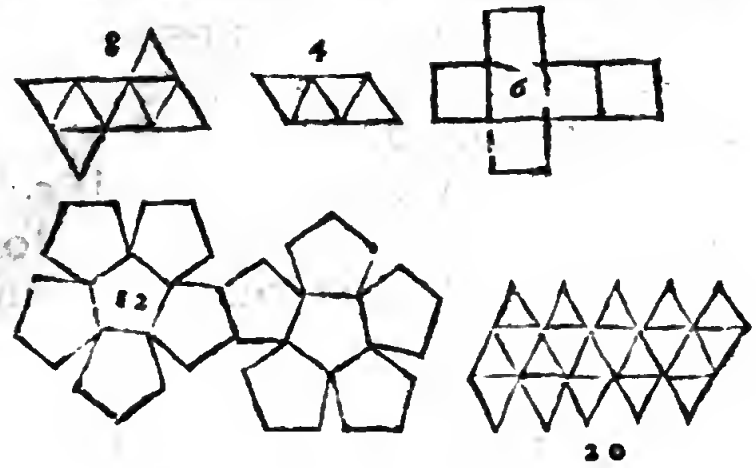
De la maniere d'inſcrire ou circonſcrire à une ſphere les cinq corps reguliers.

AVERTISSEMENT.

POur faire les cinq corps reguliers, il faut couper une ſphere, de ſorte que chaque ſection qui eſt un cercle, comme nous l'alons montrer, ſoit capable du polygone, qui eſt une des faces du corps regulier: Ainſi une ſphere étant donnée, il ne s'agit que de trouver la proportion de ſon diametre avec celuy du cercle capable d'une des faces du corps regulier qu'on veut faire.

Pour entendre cette derniere partie de nos Elemens avant que de la lire, il ſera bon de faire avec du carton les cinq corps reguliers; la ſeule veüe de la figure ſuivante en apprend le moyen.

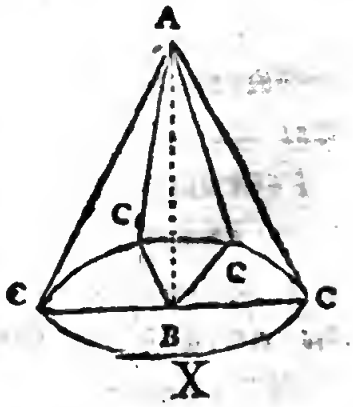
Apres avoir tracé ces figures & coupé le carton on le plie de maniere que les plans qui compoſent ces corps reguliers ſe joignent tous.



Theoréme premier.

Toute ſection d'une ſphere par un plan eſt un cercle.

X eſt la ſection d'une ſphere dont A eſt le centre ; il faut prouver que cette ſection eſt un cercle ; pour cela concevons 1°, que du centre A de la ſphere on fait tomber ſur le plan de cette ſection, que je nomme X une perpendiculaire AB. 2° Que l'on tire du même centre A des lignes telles que AC à tous les points des extremitez de X: toutes ces lignes qui ſont rayons de la ſphere, ſont égales. Elles ſont obliques, puis qu'on ne peut mener de A plus d'une perpendiculaire ſur X : or les obliques égales ont leur

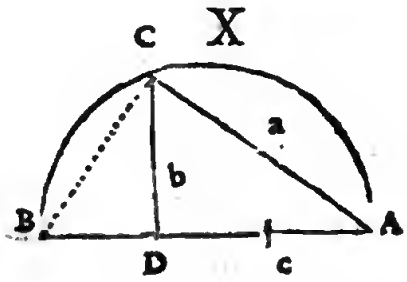


pied également éloigné de la perpendiculaire, *par le th* 6, §. 4, *l.* 1, donc toutes ces lignes menées des extremitez de X au point B ſont égales,& par conſequent ces extremitez ſont dans la circonference d'un cercle, ainſi X eſt un cercle.

Lemme.

Si le quarré ſur AC eſt triple de celuy ſur CD, je dis que D B eſt la troiſiéme partie du diametre AB.

Soit AC= a & CD= b & DA= c, *par le th.* 4, §. 3, *l.* 3, aa= bb+cc, & puiſque par la ſuppoſition 3bb= aa, donc 3bb= bb+ cc : ôtant de part & d'autre bb, on aura 2bb= cc : on ſuppoſe que CD ou b eſt moyen entre A D ou c & BD ∴ AD, CD, BD ou c, b, BD, *par la propoſ.* 11. *liv.* 4. *Grand.*



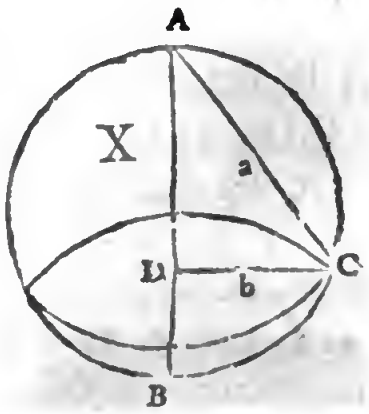
cc ou 2bb, bb : : c ou AD, D B : donc DA ſera double de BD, & conſequemment D B eſt un tiers de DA, ce qu'il faloit prouver.

Theorême ſecond.

Le quarré d'un des côtez du tetraëdre

eſt égal à ſix fois le quarré de la 3e partie du diametre de la ſphere où il eſt inſcrit.

Le tetraëdre eſt fait de quatre triangles égaux & equilateraux. Concevons que dans la ſphere X il y a un tetraëdre inſcrit, dont AC ou a eſt un des côtez, & que DC eſt le rayon du cercle dans lequel eſt inſcrit un des triangles equilateraux qui compoſent ce ſolide, par conſequent, *ſelon le th.* 7, § 3, *l.* 3. le quarré de AC, qui eſt un des côtez du triangle equilateral inſcrit dans le cercle dont CD eſt rayon, eſt triple du quarré de ce rayon; ainſi aa=, 3bb, partant *par le Lem. prec.* DB eſt la 3e partie de AB diametre de la ſphere X: ſoit donc AB= 3c, *par le th.* 7. § 1. *l.* 3. ÷ 3c, a, 2c; donc 6cc= aa, ce qu'il faloit demõtrer.



Theoréme troiſiéme.

Le quarré du diametre de la ſphere eſt en raiſon ſeſquialtere avec un des côté du tetraedre qui luy inſcrit.

Soit le côté du tetraedre a, & le diametre de la ſphere eſt 3c, *par le theoréme preced.* aa= 6 cc. Or le quarré de 3c diametre de la ſphere eſt 9cc; ainſi

la raiſon du quarré du côté du tetraedre à celuy du diametre de la ſphere ſera comme 6cc , à 9cc , ou de 6 à 9. qui eſt une raiſon ſeſquialtere.

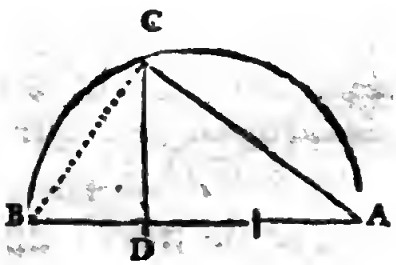
Theoréme quatriéme.

Le côté du Tetraedre eſt incommenſurable en luy même , & commenſurable en puiſſance avec le diametre de la ſphere où il eſt inſcrit.

Soit comme cy-deſſus A C , ou a, côté du tetraedre,& AB,ou 3c diametre de la ſphere,*ſelon le th. 2 ſup.* 6cc= aa, partãt ∴3c, a, 2c; donc 9cc, aa :: 3c, 2c: Or ces nombres 3. & 2. ne ſont pas nombres quarrez; donc *par le theor.* 12. *§.* 4. *l.* 3. a ſera incommenſurable en luy même avec 3 c, & commenſurable en puiſſance. Nous venons de voir dans *le theor. prec.* que aa eſt au quarré du diametre de la ſphere comme 6. a 9.

Probleme premier.

Inſcrire un tetraedre dans une ſphere, ou trouver un cercle capable d'une des faces du tetraedre.



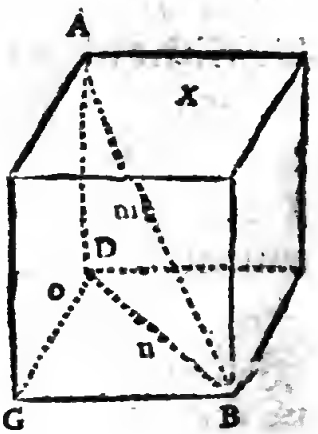
Il faut couper AB diametre de la ſphere en trois parties égales , de ſorte que AD ſoit double de B D : ſur D élever la perpendiculaire DC , laquelle

ſera le rayon d'un cercle dans lequel ayant fait un triangle equilateral dont AC eſt le côté, vous aurez une des faces du tetraëdre, comme il eſt evident, *par le th. 2. ſup.*

Theorême cinquiéme.

Le quarré du diametre de la ſphere eſt triple du quarré de chaque côté du cube, ou de l'hexaëdre qui luy eſt inſcrit.

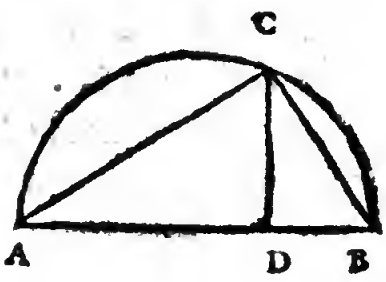
Le cube X eſt inſcrit dans une ſphere; ſoit la diagonale AB= m qui eſt le diametre de la ſphere, la diagonale d'une des faces du cube ſoit BD= n, ſoient nommez o, tous les côtez de ce cube qui ſont tous égaux. Le quarré de AB eſt égal à ceux de AD & de DB, c'eſt à dire mm= nn+oo & celuy de DB eſt égal à ceux de CD, & de BC; c'eſt à dire, nn= oo+oo : donc en ſubſtituant dans l'equation precedante oo +oo en, la place de nn, on aura mm= oo+oo+oo, ou mm= 3oo : qui eſt ce qu'il faloit demontrer, ſçavoir que le quarré de m ou de AB diametre de la ſphere, valoit trois fois le quarré de chaque côté du cube,



Problême premier.

Le diametre d'une ſphere étant donné trouver le côté du cube qui y peut être inſcrit.

Soit AB le diametre de la ſphere où il faut inſcrire un cube. Il faut trouver le côté de ce cube, qui eſt une ligne dont le quarré eſt le tiers du quarré de AB diametre de la ſphere donnée, *ſelon ce qui vient d'être demontré dans le th. preced.* Je diviſe le diametre de la ſphere AB en trois parties, de ſorte que AD eſt double de DB : ſur D j'éleve la perpendiculaire CD, & de C je mene une ligne à B qui ſera le côté du cube que je cherche. Car ſoit BA = 3c & CB = d, *par le th.* 7. § 1. *l.* 3. ∴ 3c, d, c, donc 3cc = dd. Le quarré de AB, ou de 3c eſt 9cc, donc le quarré de AB eſt triple de celuy de d, qui ne vaut que 3cc. Partant *ſelon le th.* 5 *ſup.* BC eſt le côté du cube qu'on cherchoit.



En ſuite ſi on veut avoir le cercle capable d'une face du cube, il faut faire un quarré dont CB ſoit un des côtez, & luy circonſcrire un cercle qui ſera celuy qu'on demandoit.

Theoréme ſixiéme.

Le côté du cube eſt incommenſurable en luy même,& commenſurable en puiſſance avec le diametre de la ſphere.

Par ce qu'on vient de prouver dans la propoſition preced. BC,ou,d côté du cube eſt moyen proportionnel entre tout le diametre & ſa 3e partie ∴ 3c, d, c, ainſi 3c, c, : : 3, 1, ces deux nombres 3 & 1 ne ſont pas deux nombres quarrez, partant *par le th.* 12. §. 4. *l*, 3. BC eſt incommenſurable avec AB en luy-même, mais commenſurable en puiſſance, puiſque ſon quarré eſt le tiers de AB.

Theoréme ſeptiéme.

Le quarré du côté d'un octaëdre eſt la moitié de celuy du diametre de la ſphere où il eſt inſcrit.

Concevez une ſphere dont l'axe ou le diametre ſoit AB qui ſoit coupé à angles droits au centre par le plan d'un cercle.

Concevez outre cela dans ce cercle CDEF. un quarré, dont les côtez ſeront les cordes du quart de cercle, ou de 90 degrez. Concevons de rechef qu'on

äit

ait mené des lignes de ces quatre points C, D, E, F, aux extremitez A & B de l'axe AB. *Ayez à la main une ſphere où ſoiẽt marquez A & B extremitez de l'axe, & les quatre points C, D, E, F.* 1° Ces lignes forment d'un côté quatre triangles, & de l'autre autant. 2° Toutes ces lignes étant les cordes du quart du cercle ou de 90 degrez, ſont toutes égales. Ces huit triangles ſont donc equilateraux.

Or comme il eſt évident ; le quarré de la corde de 90 degrez eſt la moitié de celuy du diametre: car deux cordes de 90 degrez font un angle droit, dont la baſe eſt le diametre du cercle ; ainſi le quarré de ces deux cordes eſt égal à celuy du diametre, qui eſt par conſequent le double de celuy de chacune de ces deux cordes.

Theorême huitiéme.

Le côté d'un octaëdre eſt incommenſurable en luy-même, & commenſurable en puiſſance avec le diametre de la ſphere où il eſt inſcrit.

Par le Th. preced. le quarré de chaque côté de l'octogone eſt la moitié de celuy du diametre de la ſphere, auquel par cõſequẽt il eſt comme 1 a 2 : or 1 & 2 ne ſont pas des nombres quarrez; donc, *par le Th.* 3, § 4 *l.* 3 ce côté eſt incommenſurable en luy-même, avec le diametre de la

ſphere, & commenſurable en puiſſance, puiſque ſon quarré eſt à celuy de ce diametre, comme 1 à 2.

Problême troiſiéme.

Trouver le côté d'un octaëdre, & un cercle capable d'une des faces de ce ſolide.

Par le Th. 7, chaque côté de l'octaëdre eſt la corde du quart d'un cercle dont le diametre eſt le même que celuy de la ſphere : La ſphere étant donc donnée, il ne s'agit que de faire un cercle ſur ſon diametre, lequel étant diviſé en quatre, la corde de chaque quatriéme partie, ſera ce qu'on cherche. En ſuite pour avoir un cercle capable d'une des faces de cet octaëdre, il faut faire un triangle equilateral, dont les côtez ſoient égaux au côté trouvé ; & luy circonſcrire un cercle, qui ſera capable du triangle qui eſt une des ſurfaces de l'octaëdre ; ce qu'il faloit faire.

AVERTISSEMENT.

Ayez à la main un dodecaëdre en liſant ce qui ſuit.

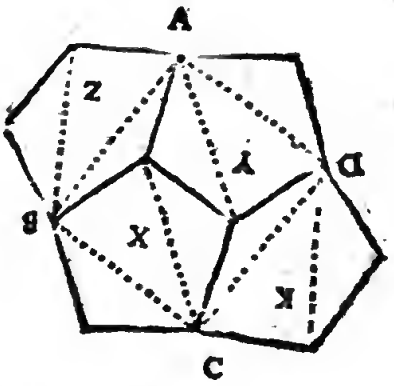
Lemme.

Voyez la figure ſuivante.

KXZY ſont des pentagones égaux, qui chacun ſont une des faces d'un dodecaëdre inſcrit dans une ſphere, je mene ſur chacune de ces faces une diagonale

de A à B, de B à C, de C à D & de D à A, & aprés avoir fait de même ſur toutes les autres qui compoſent le dodecaëdre. Je dis. 1° Que ces quatre diagonales ſont un quarré ABCD. 2° Que les diagonales des douze pentagones menées de ſorte qu'elles ſe joignent forment ſix quarrez égaux à ABCD; leſquels ſont un cube inſcrit dans la même ſphere que le dodecaëdre, dont chaque côté, par conſequent eſt égal à la diagonale de chaque pentagone.

1° Toutes ces diagonales ſont égales ſoûtenant des angles égaux. 2° On peut concevoir les quatre points A, B, C, D, dans un même plan qui coupe la ſphere où le dodecaëdre eſt inſcrit; car la figure qui eſt deſſus a ſes côtez égaux.



3° Cette ſection de la ſphere par le plan ABCD, *par le th. 1. ſup.* ſera un cercle : or *par le* Th. 2. § 3 *l.* 4. on ne peut inſcrire aucune figure de quatre côtez égaux dans un cercle, que le ſeul quarré, donc la figure ABCD, qui a ſes cotez égaux; & qui eſt inſcrite dans un cercle eſt un quarré.

4° Tout pentagone ſe peut reduire en trois triangles; partãt la ſurface d'un dodecaëdre compoſée de douze pentagones ſe reduit en trente-ſix triangles. Or chaque quarré égal à ABCD en ſoûtient ſix, comme il ſe voit dans la figure; donc ces trente-ſix triangles ne peuvent être ſoûtenus que par ſix quarrez égaux, qui forment un cube inſcrit dans la même ſphere ; & partant il eſt vray de dire que la diagonale d'un pentagone, qui eſt une des faces d'un dodecaedre inſcrit dans une ſphere, eſt égale au côté du cube inſcrit dans la même ſphere.

Scholie.

Il faut obſerver que cette figure n'eſt pas exacte. Les pentagones n'étant pas égaux ny le quadrilataire ABCD n'étant pas un quarré, mais il eſt impoſſible de repreſenter autrement ſur un plan un ſolide que ſelon qu'on le voit, & non pas tel qu'il eſt, ainſi il faut concevoir ces pentagones tous égaux & ABCD un veritable quarré, comme on vient de le demontrer.

Theorême neuviéme.

La mediane, ou la plus grande partie d'un des côtez de l'hexaëdre coupée en moyenne & extrême raiſon eſt le côté du dodecaëdre inſcrit dans une même ſphere.

1° Je ſuppoſe un dodecaëdre fait dans lequel on a marqué un cube ou hexaëdre. Comme l'on l'a dit dans le Lemme prec.

chaque côté de ce cube eſt égal à la diagonale de chaque pentagone, dont le dodecaëdre eſt compoſé. Mais *par le Th.* 11. §. 1. *l.* 3. la mediane ou la plus grande partie de la diagonale du pentagone coupée en moyenne & extrême raiſon eſt égale au côté de ce pentagone ; partant coupant le côté d'un cube ou exaëdre en moyenne & extrême raiſon, la plus grande partie ſera un des côtez de chaque pentagone, dont le dodecaëdre eſt formé.

Problême quairième.

Trouver le côté d'un dodecaëdre & un cercle capable d'une des faces de ce ſolide.

Il faut premierement trouver, *par le Problême* 2 *ſup.* le côté d'un cube inſcrit dans la ſphere propoſée. 2° Couper ce côté du cube en moyenne & extrême raiſon : la plus grande partie ſera le côté du dodecaëdre propoſé, ſelon ce qui vient d'être démontré.

Pour avoir le cercle capable d'une des faces du dodecaëdre, il faut faire, *par le Problême* 10. § 1. *l.* 3. le pentagone dont on vient de connoître un des côtez ; en ſuite luy circonſcrire un cercle qui ſera ce quon cherche.,

Theorême dixiéme.

Le côté du dodecaëdre eſt incommenſurable avec le diametre de ſa ſphere, tant en luy même, qu'en premiere puiſſance.

Soit le diametre de la ſphere b, celuy du côté du cube inſcrit dans la ſphere c+d coupé en moyenne & extrême raiſon dont c, eſt la plus grande partie, qui *par le Th. 9e ſup.* eſt le côté du dodecaëdre.

1° *Par le Cor. du Th.* 15e §. 4. *l.* 3. c, eſt incommenſurable tant en elle-même qu'en puiſſance avec c+d.

2° *par le Theorême 6 ſup.* c+d eſt commenſurable en premiere puiſſance avec b, c'eſt à dire, que cc+2cd+dd eſt cõmenſurable avec bb, puis qu'il en eſt le tiers, il faut donc que cc ſoit incommenſurable avec bb; car s'il étoit commenſurable avec bb il le ſeroit avec le quarré de c+d, *par le Th.* 1er § 4e *l.* 3e. par conſequent cc, eſt incommenſurable en puiſſance avec bb, & *par le Th.* 3§ 4 *l.*3. c ſera auſſi incommenſurable en luy-même avec b, donc, &c,

Lemme premier.

MN eſt le diametre d'un cercle, dans lequel les deux cordes AB & CE qui coupent MN à angles droits, ſont paralelles entr'elles, & la diſtance de F G

égale à la moitié de chacune; je dis que MF ſera le côté d'un decagone inſcrit dans un cercle dont FA ſera le rayon.

Suppoſant MF ou GN = x & AF = z + x : ſi MF ou x eſt le côté d'un decagone dont AF ou z + x eſt le rayon ; il faut qu'ayant coupé AF en moyenne & extrême raiſon, x en ſoit la mediane, *ſelon le Theorême* 10e § 1er *l*, 3e, & que par conſequent ∴ z + x, x, z, ainſi ſi nous démontrons cela, ſçavoir que ∴ z + x, x, z, nous avons fait ce qui eſt propoſé.

Puiſque AF = z + x ; donc AB = 2z + 2x, & BC = z + x, le quarré de AB, qui eſt 4zz + 8zx + 4xx, avec celuy de BC qui eſt zz + 2zx + xx, ſont égaux à celuy de AC ou de MN : or par l'hipotheſe MN = 3x + z; car MF & GN ſont chacun égaux à x, & FG = z + x : or le quarré de 3x + z eſt 9xx + 6xz + zz : mettant donc les deux quarrez de AB & de BC en une ſomme 9xx + 6zx + zz = 5zz + 10zx + 5xx, ôtant de part & d'autre 5xx + 6xz + zz, il reſtera 4xx = 4zz + 4zx; diviſant l'un & l'autre membre par 4, il viendra xx = zz + zx ; donc ∴ z + x, x, z, puiſque le produit de extrêmes z + x & z qui eſt

zz+zx eſt égal à xx, quarré de la grandeur moyenne x; c'eſt ce-qu'il faloit démontrer,

Lemme ſecond.

La ligne AM eſt le côté d'un pentagone inſcrit dans un cercle dont AF eſt le rayon.

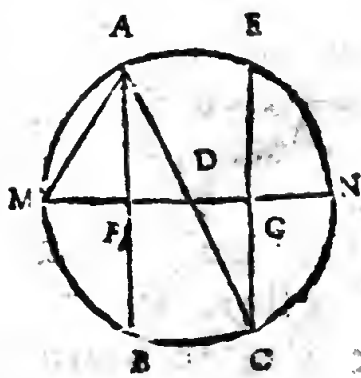
Voyez la figure ſuivante,

MF eſt le côté du decagone dans un cercle dont AF eſt le rayon, comme nous venons de le démontrer: le quarré de AF avec celuy de MF ſont égaux à celuy de AM; donc, *par le Theor.* 8 §. 3, *l.* 3, AM eſt le côté du pentagone.

Lemme troiſiéme.

Le quarré de AF ou de FB, ou de GE, ou de GC lignes égales, eſt la cinquiéme partie de celuy du diametre AC ou MN.

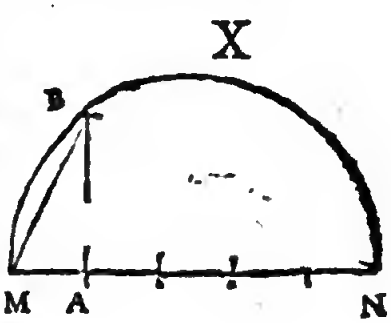
Soit AF = b; donc AB = 2b, & BC = b, le quarré de AB eſt 4bb & celuy de BC eſt bb : or ces deux quarrez qui font 5bb ſont égaux à celuy de AC ou de MN; donc ſce quarré vaut cinq fois celuy de AF.



Lemme quatrième.

Trouer la ligne AF, le diametre MN étant donné.

Voyez la figure precedante. Il n'eſt queſtion que de trouver une ligne dont le quarré ſoit la cinquiéme partie de celuy de MN, ſelon ce que nous venons de démontrer dans le Lemme precedant.



Pour cela je faits un cercle X dont MN eſt le diametre que je coupe de ſorte que AM eſt la cinquiéme partie de MN, *par le Th.* 10. §, 3, *l.* 3, le quarré de MN peut cinq fois celuy de MB, ainſi MB ſera la ligne que l'on cherchoit, c'eſt à dire égale à AF de la figure du Lemme premier.

Problême cinquiéme.

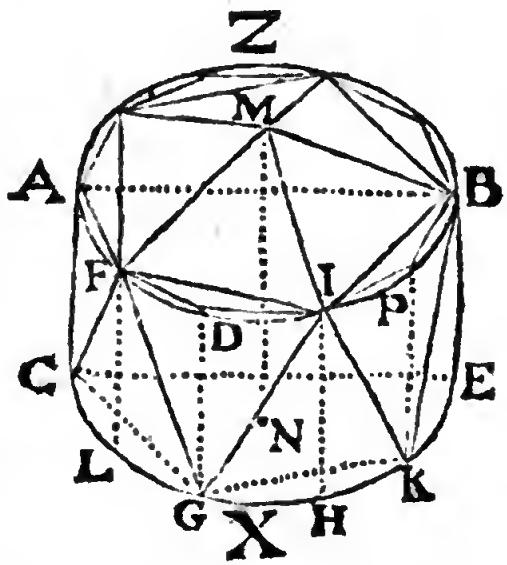
MN diametre d'une ſphere étant donné faire un icoſaëdre.

1° *Par le Lemme* 4 *ſup.* ayant trouvé la valeur de AF. *Voyez la figure du premier Lem.* & l'ayant coupé par la moitié: du centre D je faits DF & DG égales à cette moitié,

de ſorte que FG= AF, aprés je mene AB & CE, qui coupent MN à angles droits.

2° Prenant AB & CE pour diametres, je faits deux cercles que je nomme Z & X, qui ſont paralelles, *Voyez la figure ſuiv.* étant ſur des plans qu'on ſuppoſe paralelles.

3° J'inſcrits dans chacun de ces deux cercles un pentagone, & de chaque angle je mene des lignes droites à M & à N extremité du diametre de la ſphere, ce qui fait cinq triangles dont les côtez ſont égaux chacun au côté du pentagone inſcrit dans ces deux cercles, *par le Lemme 2 ſup.* ainſi tous les côtez de ces triangles étāt tous égaux aux côtez des pentagones forment deux angles ſolides ſur les cercles Z & X chacun de cinq triangles equilateraux dont le ſommet eſt aux extremitez M & N du diametre de la ſphere; & voila déja dix faces trouvées de l'icoſaëdre. *On n'a pas jugé à propos de marquer l'angle ſolide ny ſes côtez dont le ſommet eſt en N, de peur de rendre la figure confuſe,*



il y faut ſuppléir par la penſée.

4° J'inſcrits encor dans ces mêmes cercles Z & X un decagone, dont je joints les angles qui ſe repondent dans X & Z par les lignes BE, PK, IH, DG, FI, &c. qui par l'hipotheſe ſeront toutes egales aux rayons de Z & de X, 5° je mene les diagonales BK, KI, IG, GF, &c. Les quarrez BP côté du decagone avec celuy de PK, qui eſt égal au rayon de Z & de X ſont égaux à celuy de BK; donc, *par le Th.* 8e § 3e *l.* 3e BK eſt le côté du pentagone inſcrit dans Z & dans X : la même choſe ſe demontre de KI, de IG, de CF, &c. les triangles BKI, KIG, IGF, &c. ont pour baſe les côtez dudit pentagone, ils ſont donc equilateraux entre eux & aux dix qui compoſent les deux angles ſolides, dont nous avons parlé cy-deſſus : par conſequent il y a entre Z & X dix de ces triangles, dont cinq ont leurs baſes ſur Z & les cinq autres ſur X, leſquels avec les dix déja trouvez font les vingt triangles égaux & equilateraux qui doivent compoſer l'icoſaëdre, ce qu'il faloit faire.

Corollaire premier.

De ce Problême & des Lemmes precedans il ſuit 1° *Par le Lemme* 3e, que le

quarré du diametre de la ſphere eſt quintuple du quarré du rayon du cercle ou X qui eſt la baſe d'un angle Z ſolide fait de cinq triangles equilateraux..

Voyez la figure du Lemme 4. où on a fait voir que le quarré de AF eſt la cinquiéme partie de celuy de AC ou de MN

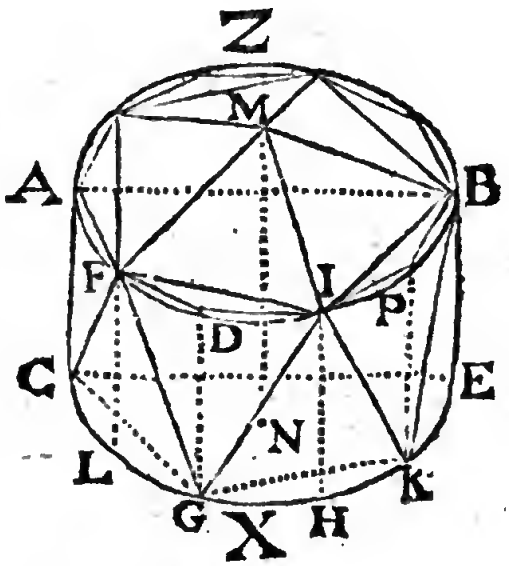
Corollaire ſecond.

2° Le diametre M N eſt compoſé du côté de l'exagone, ou du rayon des cercles Z & X, & de deux côtez du decagone inſcrit dans ces cercle.

Puiſque MN= MF+FG+GN.

Corollaire 3e.

3° Les côtez des triangles de l'icoſaëdre ſont égaux aux côtez des pentagones inſcrits dans Z ou X.



Theoréme onziéme.

Les côtez de l'icoſaëdre ſont incommenſurables, tant en eux-mêmes qu'en

puiſſance avec le diametre de la ſphere où l'icoſaëdre eſt inſcrit.

Par le Coroll. 1. *ſup.* le quarré du rayon des cercles qu'on décrit pour faire l'icoſaëdre eſt la cinquiéme partie ce celuy du diametre de la ſphere.

Soit ce quaré bb, partant celuy du diametre de la ſphere eſt 5bb. Ces deux quarrez ſont donc commenſurables, étans comme 1 a 5. Soit x côté des triangles qui ſont l'icoſaedre, lequel x eſt un des côtez d'un pentagone inſcrit dans un cercle dont b eſt le rayon, *par le Coroll.* 3e *ſup.* partant, *par le Th.* 17e § 4e *l.* 3e, bb & xx quarrés du côté du pentagone dont b eſt le rayon, ſont incommenſurables: auſſi-bien que leurs racines, x & b & puiſque le quarré bb du rayon eſt cõmenſurable avec le quarré du diametre de la ſphere, il faut que xx ſoit incõmenſurable avec le quarré de ce diametre; car s'il étoit commenſurable avec luy, il le ſeroit, *par le Th.* 1er § 4e *l.* 3e avec celuy de b, & ſi xx & le quarré du diametre ſont incommenſurables x & le diametre le ſont auſſi, puiſque les raiſons des quarrez ſont doublées de celles de leurs racines, & qu'ainſi ſi les doubles ſont ſourdes, il faut que les compoſantes le ſoient auſſi: car le produit de deux nombres eſt un nombre.

Scholie.

Nous n'avons parlé que de la maniere d'inſcrire les cinq corps reguliers dans une ſphere donnée. Si on veut les circonſcrire, ayant trouvé le cercle ou une des faces du corps propoſé eſt inſcrite, il faut circonſcrire à ce même cercle cette même face, qui ſera celle d'un ſolide circonſcrit à la ſphere donnée.

Il n'y a rien à dire touchant la maniere de meſurer les ſurfaces de ces corps. Il eſt clair qu'il ſuffit de meſurer une de leurs faces, & de multiplier en ſuite cette face par le nombre des autres, ce produit donnera la ſurface entiere de ce ſolide. Il eſt evidant que ces ſolides ſont compoſez d'autant de pyramides égales qu'ils ont de faces, qui ſont les baſes de ces pyramides, dont la pointe eſt au centre de la ſphere dans laquelle ces ſolides ſont inſcrits : ainſi il eſt facile de meſurer leur ſolidité.

ELEMENS DE GEOMETRIE, OV DE LA MESVRE DV CORPS.

LIVRE CINQVIE'ME.

De la Methode.

CHAPITRE PREMIER.

L'on peut déduire des Elemens qui ont été expliquez cy-deſſus, tout ce qui ſe peut ſçavoir de Geometrie, lors qu'on ſuit une bonne methode.

IE ne pretends pas avoir épuiſé tout ce que l'on peut dire des trois

dimenſions du corps dont j'ay traité dans les quatre Livres precedans. Les Elemens des Sciences doivent être courts & faciles. On n'y doit renfermer que les proprietez generales du ſujet que l'on traite ; on fait aſſez lors qu'on les explique de maniere qu'un Problême étant propoſé, la reſolution s'en preſente à l'eſprit, qui étant plein des premieres veritez, découvre ſans peine les veritez particulieres qui en coulent comme de leurs ſources. Pour ſçavoir ce que nous ne diſons point icy, ou plus que nous ne diſons il n'y a qu'à étudier avec ſoin ce qui a été dit. Il ſeroit même dangereux pour ceux qui s'appliquent à la Geometrie qu'on ne leur laiſſât rien à faire. On ne l'étudie que pour exercer l'eſprit & le former en cherchant avec methode quelque nouveau Theorême.

Il y a pluſieurs pratiques aiſées pour executer les problêmes de Geometrie. On en peut inventer cent autres qui ſeront nouvelles. Celles qui s'enſeignent ordinairement ſont ſi faciles à ceux qui ſçavent les Elemens, que quand le deſir d'être court ne me les auroit pas fait paſſer ſous ſilence, je n'aurois pas crû les devoir rapporter. Il y a une infinité de Livres où tout cela eſt enſeigné. En jettant les yeux deſſus on apperçoit d'abord

les

les fondemens des pratiques qu'on y propoſe. Toutes les figures ſe peuvent reduire en triangles, ainſi ces pratiques conſiſtent à meſurer un triangle, comme auſſi ce qu'on peut dire de la meſure des diſtances des hauteurs & des profondeurs, n'eſt qu'une application de ce qui a été enſeigné dans ces Elemens touchant les triangles & leurs proportions. On a des inſtrumens qui abregent les operations de ces pratiques. Ces inſtrumens ſont même comme des Corollaires de quelque Theorême ; car par exemple, le compas de proportion, avec lequel on diviſe une ligne ſelon une raiſon donnée, n'eſt qu'une application de ce qu'on démontre des raiſons & proportions des triangles, *l.* 3. § 1. Avec le même compas on partage un cercle donné en ſes degrez. La pratique qu'enſeignent pour cela ceux qui ont traité de l'uſage de ce compas, eſt fondée ſur ce que nous avons enſeigné, *l.* 2. § 3. *Pr.* 6. que le rayon d'un cercle eſt égal à la corde d'un arc de 60 degrez du même cercle. Je dis cela pour exemple, celuy qui ſçaura nos Elemens en parcourant en peu d'heures un traité de l'uſage du compas de proportion, en emportera tout ce qu'il y a d'utile, ainſi de tous les autres livres ſemblables.

Lors qu'on étudie la Geometrie dans

le deſſein de ſe rendre l'eſprit juſte, ce qui doit être la fin de nos études, il ne ſuffit pas de s'exercer par la recherche de quelques Problêmes. Il faut entreprendre quelque petit traité de Geometrie, pour s'accoûtumer à étendre ſes connoiſſances, à traiter les choſes dont on veut parler avec ordre. Il y a bien des choſes que nous n'avons traitées que ſuccintement, qu'on peut étendre fort au long. On n'épuiſera jamais la Geometrie ſi entierement, qu'il ne reſte aſſez de matiere pour des traitez particuliers, auſquels perſonne n'aura encore point touché; & même quand un traité auroit déja été fait, cela n'empêche pas qu'on ne s'y puiſſe appliquer avec fruit. En comparant ſon travail avec les ouvrages des Grands Hommes, on reconnoit où on a manqué; ce qu'il auroit fallu faire, & les differentes manieres dont on peut traiter un méme ſujet.

Nous n'avons dit que peu de choſes des lignes antiparalelles dans la *Scholie du Theor. 6. § 1. l. 3.* Mr Arnaud dans ſes Elemens de Geometrie, traite cette matiere avec l'exactitude qui luy eſt ordinaire. On pourroit donc choiſir cette matiere, & en dire & démontrer tout ce qui ſe peut, & en ſuite comparer ce que l'on auroit fait avec ce qu'il en a démontré.

Nous avons démontré *l. 2. §. 4. Th. 2.*

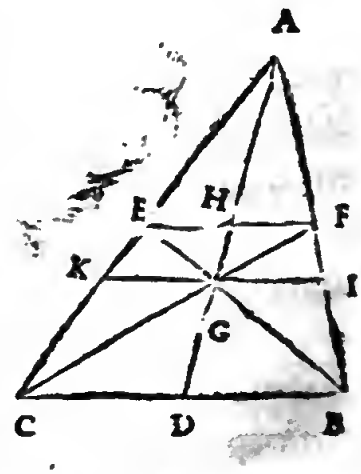
que deux paralelogrammes qui ont même hauteur & même baſe ſont égaux, quoyque leurs côtez ſoient inégaux. Nous avons démontré la même choſe des triangles; de là on peut prendre occaſion de rechercher quelles ſont les figures qui dans un plus petit circuit, renferment un plus grand eſpace. Des Theorêmes qui ont été propoſez dans ces Elemens on peut tirer pluſieurs Corollaires ou veritez, qui miſes en ordre feront un traitté ſur cette matiere. Clavius a fait ce traitté qu'il appelle, Des Iſoperimetres; il eſt dans ſes Commentaires ſur la ſphere de Sacroboſco.

On peut trouver une infinité de differens ſujets qui ſont tres utiles. Par exẽple, 1° De la ſection des eſpaces. Comment on peut diviſer ſelon une raiſon donnée tout eſpace donné. 2° De la transformation des Grandeurs, c'eſt à dire, de la maniere de trouver une certaine figure dont l'eſpace ſoit égal à celuy d'une figure donnée, qui eſt d'une autre eſpece; par exemple, un triangle égal à un quarré donné.

Il y a des Geometres qui ont traité en particulier des cordes & des ſinus du cercle, qui ont conſideré les proprietez des lignes tangentes, des lignes inclinées. Les autres ſe ſont attachez à conſiderer en particulier les raiſons de quel-

ques figures particulieres. Ils ne diſent rien dont nous n'ayons jetté les fondemens dans nos Elemens. J'ay fait ces reflexions pour faire remarquer comme l'on peut trouver pluſieurs ſujets qui regardent la Geometrie pour s'y exercer, & en méme temps augmenter les connoiſſances dont nous avons enſeigné les Elemens.

Pour eſſay je feray icy quelque conſideration ſur la Section des triangles. On peut couper un triangle en differentes manieres. 1° Par des lignes tirées du ſommet de l'angle ſur la baſe comme dans BAC, menant de A ſur BC une ligne. Alors la portion BAD ſera à la portion ACD comme BD eſt à CD, concevant des paralelles à la baſe BC, ſi CD eſt moitié de BD. Toutes ces paralelles ſeront coupées par la moitié, ainſi BAD ſera égal à CAD : ſi BD eſt le double de CD, les portions des paralelles dans D A B ſeront le double des portions de ces paralelles qui ſont dans CAD.



D'où l'on voit que pour couper un triangle dans cette premiere maniere, ſelon une raiſon donnée; il faut couper ſa baſe ſelon cette raiſon ; & au point de

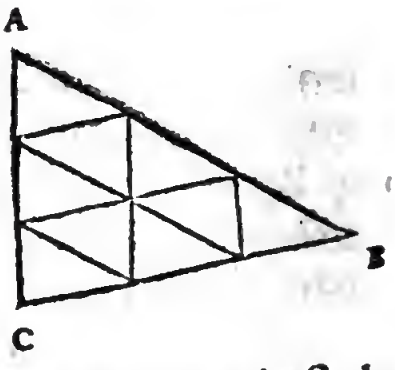
la diviſion mener du ſommet une ligne.

C'eſt une choſe remarquable qu'en menant du ſommet de chaque angle une ligne ſur la moitié du côté oppoſé comme BE & CF : ces lignes ſe coupent en un ſeul point, de ſorte que la petite portion GF eſt le tiers de toute la ligne CF, ce qui eſt evident; car ayant mené par E & F une ligne, elle ſera paralelle à BC, & DH ſera la moitié de AD & EF, la moitié de BC: or puiſque les deux triangles B G C & EGF ſont ſemblables, & que EF eſt moitié de BC ; GF ſera moitié de CG, & conſequemment GF le tiers de CF; on demontrera de même que EG eſt le tiers de EB. &c.

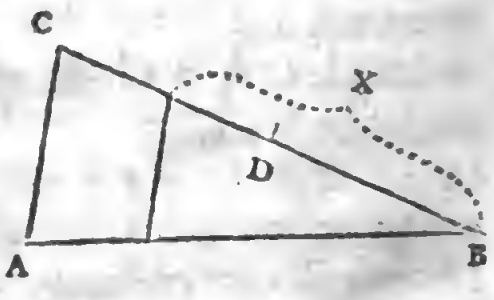
2° On peut couper un triangle par une paralelle à ſa baſe. Dans le cas precedent ayant mené par G une ligne paralelle à BC : la portion BCIK ſera à AIK comme 5 eſt à 4 ; car les ſurfaces des deux triangles A B C & AIK ſont entr'elles comme les quarrez de AD & de AE, *par les Th* 12 *&* 13*l.*3.*§* 3. or ſi AD eſt 3, AG ſera 2 par ce qu'on vient de démontrer, elles ſeront donc comme 9 eſt à 4; & partant BCIK ou A B C moins AIK eſt à A I K comme 9 — 4 eſt à 4, c'eſt à dire, comme 5 eſt à 4.

3° Lors qu'on coupe en parties égales les côtez d'un triangle, & qu'on mene des paralelles par les points de divi-

sion, on trouve que les espaces augmentent selon les nombres impairs. Le premier espace qui est au sommet ne contient qu'un trianngle ; le second espace en a trois : le troisiéme en a cinq, ainsi de suite.



On peut couper un triangle par une paralelle à la base en la raison qu'on le voudra ; par exemple, ABC, de sorte qu'une portion soit moitié du tout ; pour cela 1° il faut couper CB en D, en sorte que BD soit la moitié de BC. 2° Il faut chercher entre BC & DB une moyenne proportionnelle que je nomme X, à laquelle je prends une ligne égale sur BC.



Le triãgle dõt X sera le côté, sera à celuy dont BC est le côté, c'est à dire, au triangle ABC qui luy est semblable en raison doublée de celle de X à BC, & par consequent comme le quarré de X est à celuy de BC: or puisque par l'hipothese ∴ BD, X, BC, *par la prop.* 11e *l.* 4e *Grandeur*, ces deux quarrez de X & de BC, sont comme BD à BC,

& partant cõme 1 à 2, puiſque B D eſt la moitié de BC par la conſtruction ; donc le triangle dont X eſt le côté, eſt la moitié du triangle ABC.

CHAPITRE II.

De la methode qu'il faut ſuivre dans l'examen d'une queſtion.

LE ſeul ordre eſt un moyen general pour reſoudre pluſieurs difficultez, & pour trouver des veritez qui ne ſe peuvent déduire de la ſeule cõnoiſſance des proprietez particulieres du corps. Nous en avons vû l'effet dans le 7e livre de la Grandeur. Je faits icy une application de ce qui a été dit de la Grandeur en general à une eſpece particuliere de grandeur, c'eſt à dire, à la Geometrie ou meſure des corps.

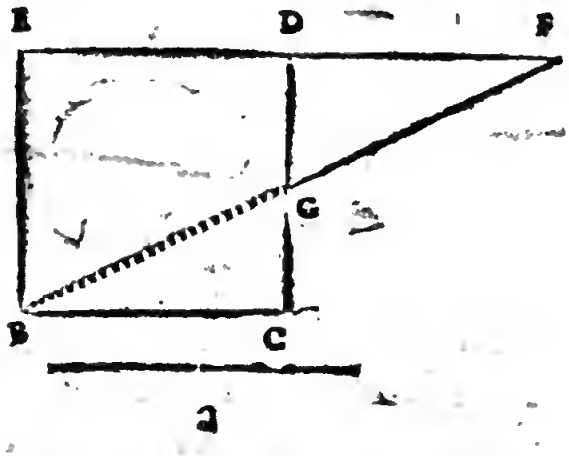
Ce n'eſt que par l'application de l'eſprit qu'on atteint la verité. Il faut donc conſiderer attentivement le ſujet de la queſtion qui eſt propoſée, pour appercevoir ce qu'il en faut penſer. Ce qui nous arrête, c'eſt le peu de fermeté qu'a nôtre eſprit dans la conſideration de la

verité. Il le diſtrait facilement : mille & mille pẽſées ſe preſentent à luy en foule, qui le font tourner de tous côtez, & ne luy permettent pas de conſiderer une même choſe autant de temps qu'il ſeroit neceſſaire pour appercevoir ce qu'elle eſt. Pour remedier à ce defaut qui eſt la cauſe de pluſieurs autres, il faut tâcher de fixer l'eſprit, & de l'arrêter par quelque objet qui luy ſoit ſenſible, c'eſt à dire, qu'il luy faut exprimer d'une maniere qui frappe les ſens la choſe qui eſt le ſujet de la queſtion. Cela n'eſt pas impoſſible ; car quoy qu'on ne connoiſſe pas entierement les choſes qui ſont propoſées, puis qu'il n'y auroit pas lieu d'en faire une queſtion, auſſi ne l'ignore-t-on pas entierement, on ne l'attaqueroit pas, ſi elle n'avoit quelque priſe, ſi l'on n'en connoiſſoit quelque partie qui pût donner la connoiſſance du tout. De ce qu'on connoit on peut ſuppoſer que la choſe qui eſt propoſée eſt telle ou telle : ce qui ſe comprendra mieux dans un exemple.

On propoſe de couper un des côtez d'un quarré par une ligne menée de l'un des angles de ce quarré juſques à ce qu'elle rencontre un de ſes autres côtez prolongé autant qu'il eſt neceſſaire, de ſorte que la partie de cette ligne qui eſt hors le quarré ſoit égale à une ligne donnée.

Voilà la queſtion. Pendant qu'aucune figure ne la rend ſenſible, l'eſprit a de la peine à s'y attacher, il eſt vagabond. Quoy que l'on ne ſçache point encore quelle eſt la grandeur que l'on cherche, & comment il faut faire ce qui eſt propoſé ; neanmoins on peut ſuppoſer la choſe faite en la maniere ſuivante.

Aprés avoir donné les noms aux grandeurs dans la queſtion, nommant a *la ligne connuë & BCDE, ce quarré propoſé qui eſt auſſi connu, je prolonge ED un des côtez à diſcretion juſque en F, & de B l'un des angles du quarré je mene la ligne BF. Il eſt evident que cette figure repreſente la forme de celle où le côté DC ſeroit tellement coupé en G, que la ligne GF fut égale à la ligne connuë* a, *ainſi je puis ſuppoſer cette ligne GF égale à* a, *& en ſuite examiner cette queſtion comme ſi le côté DC avoit été coupé en la maniere qu'il le doit être. Cette figure me donne de la facilité pour m'appliquer à la queſtiõ propoſée en me la rendant ſenſible. Ie la conſidere ſans peine ; & j'en examine toutes les proprietez qui peuvent me decouvrir la verité, c'eſt à dire, le moyen de couper DC, de*



ſorte qu'ayant mené de B une ligne par le point de cette ſection, la partie de cette ligne qui ſera entre DC, & ſe terminera au prolongement de ED, ſoit la ligne que l'on cherche, c'eſt à dire, que GF ſoit égale à la ligne connuë a.

CHAPITRE III.

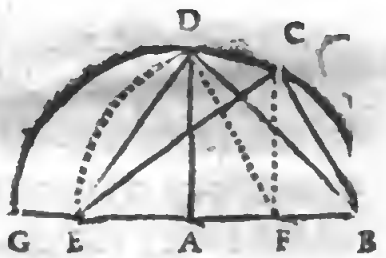
Il faut premierement, éclaircir une queſtion. En ſecond lieu retrancher ce qui ne feroit que l'embarraſſer, & ſuppléer les choſes qui la rendent plus claire. On doit employer des termes propres pour l'exprimer.

NOus avons vû dans le 7e livre de la Grandeur qu'une des choſes les plus importantes dans l'examen d'une queſtion, eſt d'en ſeparer tout ce qui ne ſert qu'à la rendre plus obſcure, & qu'il faut ſuppléer ce que celuy qui l'a propoſé ne dit point, & dont on peut ſe ſervir pour la reſoudre.

On dit que ſi BC eſt égal au rayon AB, & que BD ſoit la corde de 90 degrez,

qu'ayant pris CE égal à BD, la ligne ED ſera le côté du pentagone inſcrit dans ce cercle dont AB eſt le rayon. La queſtion eſt de trouver ſi cela eſt vray, ou ſi cela eſt faux.

Cette figure avec les ſeules lignes BC, BD, BE ne me fait point appercevoir la demonſtration de cette verité. Mais comme je ſçay que *ſelon le Problême* 1. §. 3. *l.* 3. en coupant le rayon AB par la moitié en F, & faiſant EF égale à FD, la ligne ED ſera le côté du pentagone. J'examine ſi l'operation propoſée n'eſt point la même choſe que celle qui eſt enſeignée dans le lieu que je viens de citer, c'eſt à dire, 1° Si ayant abaiſſé de C extremité du rayon BC une perpendiculaire elle coupe AB en deux parties égales. 2° Et ſi cela étant & ayant de C de l'intervalle BD coupé GB en E, il ſe trouve que FE ſoit égal à FD.



1° Je ſuppoſe AB ou BC= 2a, partant GB= 4*a*. BC, ou 2*a* eſt moyen proportionnel entre GB ou 4*a* & FB, partant le quarré de BC qui eſt 4*aa* ſera égal au plan de GBF, qui ſera ainſi 4*aa*. Diviſant ce plan par GB l'une de ſes racines, c'eſt à dire, par 4*a*, le quotient qui eſt *a* ſera la valeur de FB, ainſi FB eſt moitié de AB

qui vaut $2a$, ce qu'on cherchoit premierement.

2° Le quarré de BC, c'eſt à dire, $4aa$ eſt égal à ceux de FC & de FB, celuy de FB eſt aa, donc celuy de FC eſt $3aa$.

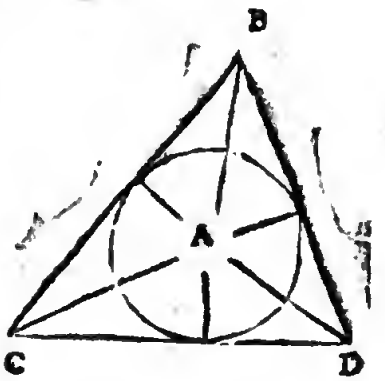
Le quarré de FD eſt égal à celuy de AD, qui eſt $4aa$ & à celuy de AF qui eſt aa, ainſi il vaut $5aa$; donc ſi le quarré de EF eſt auſſi $5aa$, alors EF = FD : or le quarré de DB égal à ceux des deux rayõs AD & AB, eſt $8aa$, ainſi le quarré de EC égal par l'hipotheſe à BD ſera $8aa$, ce quarré de EC eſt égal à ceux de FC, qui eſt $3aa$ & de EF; donc ôtant $3aa$ de $8aa$ le reſte $5aa$ ſera la valeur du quarré de EF partant EF eſt égal à FD, ce qu'il faloit prouver.

Remarquez bien que ce qui nous a facilité la demonſtration precedante, c'eſt que nous avons éclairci la queſtion, & donné des noms convenables aux lignes propoſées, ayant nommé $2a$ le rayon du cercle. L'éclairciſſement d'une queſtion conſiſte ſouvent à faire une figure qui l'exprime bien. En voicy un exemple.

Si l'angle ABD eſt coupé par la moitié par la ligne BC, on dit que AB, AC :: BD, CD. Pour le démontrer je mene DE paralelle à

BC. Je prolonge AB juſques en E ; ainſi les angles ABC & AED ſont égaux : or l'angle CBD = ABC = BDE, puis qu'ils ſont fait par l'oblique BD ſur les paralelles BC, DE. partant AED = BDE, ainſi EBD eſt un triangle iſoſcele, ainſi BD = BE : or les triangles BAC & EAD étant ſemblables AB, AC : : BE, CD mettant donc à la place de BE ſon égale BD, alors AB, AC : : BD, CD, ce qu'il faloit prouver.

On dit que la ſurface d'un triangle eſt égale à la moitié de la ſomme de ſes trois côtez multipliez par le rayon d'un cercle qui luy eſt inſcrit. La ſeule veüe de cette figure démontre que cela eſt veritable. Des angles du triangle BCD ayant mené des lignes au centre A du cercle qui luy eſt inſcrit, on fait trois triangles égaux enſemble au triangle BCD, leſquels ont pour hauteur le rayõ de ce cercle. Ces trois triangles ſont égaux à un, dont la baſe eſt égale aux trois côtez de BCD, & qui a pour hauteur le rayon du cercle inſcrit : donc la ſurface de ce triangle eſt égale au produit de la moitié de ſa baſe par ſa hauteur, qui eſt la même choſe que ce qu'il fa-

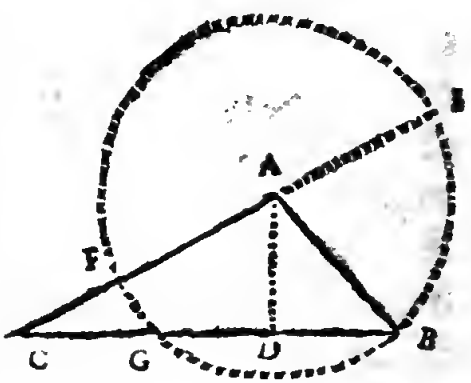


loit prouver.

Voyons encor par un autre exemple combien la maniere d'exprimer une queſtion par une figure convenable en facilite la reſolution.

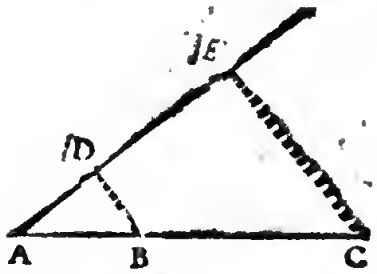
Dans un triangle comme ABC, ſi de l'angle CAB on mene une perpendiculaire ſur BC, la ſomme des deux côtez AB, AC eſt à BC baſe de l'angle que ces deux côtez comprennent comme la difference de CD & DB eſt à celle de AC & AB.

Pour trouver la demonſtration de ce Theorême & l'exprimer d'une maniere qui en facilite l'invention. De A comme centre, & de l'intervalle AB le plus petit côté, je faits un cercle ; & puiſque AB = AE, CE eſt la ſomme des côtez AC & AB, & que AF = AB ; CF eſt leur difference. Puiſqu'auſſi DB = DG la ligne GC ſera la difference entre CD & DB : ainſi voilà une expreſſion ou une figure qui marque ce que l'on cherche. Aprês quoy la queſtiõ ſe reſoud facilemẽt, car *par la Scholie du Th. 6 l. §* 1. les lignes CE & CB ſont coupées reciproquement en F & en G, ainſi CE, CB :: CG, CF, ce



qu'il faloit démontrer.

Pour conſtruire une figure, ſelon que la queſtion le requiert, il eſt bon de ſçavoir qu'on peut faire toutes les operations de l'Arithmetique avec le compas & la regle. On peut ajoûter une figure avec une autre, ou retrancher la plus petite de la plus grande. Pour la multiplication d'une ligne par une ligne, c'eſt à dire pour trouver une ligne qui ſoit égale au produit de deux lignes, comme AD & AC, il faut prendre ſur AC la ligne AB égale à l'unité, & mener une ligne AD qui faſſe un angle à diſcretion avec AB : je tire une ligne par D & B, & une autre par C qui luy ſoit paralelle, ce qui étant fait, AE ſera la ligne que l'on cherche : car AB, AD :: AC, AE, donc le produit des extrêmes AB & AE eſt égal au produit des moyens AD, AC ; or AE étant multiplié par AB qui eſt l'unité, n'augmente point donc AE, qui eſt une 4e proportionnelle ſera égale au produit de AD par AC ce que l'on cherchoit.



Si l'on veut diviſer AE par AC ayant pris AB égale à l'unité, & mené par B une paralelle à CE, on aura AD qui ſera la valeur de AE diviſé par AC, car

AB, AD :: AC, AE, & l'unité eſt au quotient d'une diviſion, comme le diviſeur eſt à la grandeur diviſée.

S'il faut tirer la racine quarrée de GH, je luy ajoûte en ligne droite FG qui eſt l'unité, & diviſant FH en deux parties égales au point E : du centre E je faits le cercle FIH, élevant en ſuite du point G une ligne droite juſques à I à angles droits ſur FH, la ligne GI eſt la racine que l'on cherche : car

∴ FG, GI, GH, donc le quarré de GI eſt égal au produit de FG & GH : or FG étant l'unité, elle n'augmente point la valeur de GH en la multipliant, ainſi GH eſt égale au quarré de GI, qui par conſequent eſt la racine de GH. Par ce même moyẽ on peut trouver une ligne qui ſoit égale à la racine quarrée d'un nombre qui n'eſt pas quarré, par exemple de 18, car prenant GH égale à 18, & luy ajoûtãt FG égale à l'unité & du milieu de cette ligne faiſant un cercle, &c. la ligne GI ſera égale à la racine quarrée de 18, qui ne peut être exprimée par nombre, comme on l'a demontré.

CHAPITRE

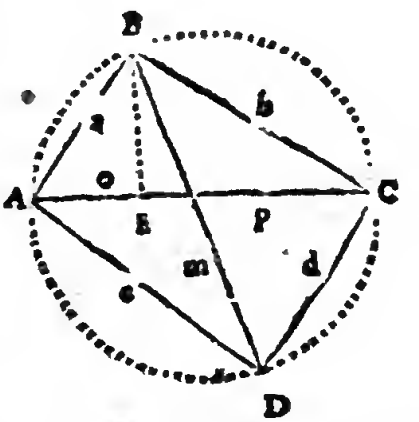
CHAPITRE IV.

Ayant ſuppoſé la choſe que l'on cherche, telle qu'elle doit être, en conſiderant les proprietez qui luy conviennent, l'on connoît ſi ce qu'on propoſe eſt poſſible, & le moyen de reſoudre la queſtion.

APrés que la figure a été faite telle qu'elle le doit être, ſelon que la queſtion a été propoſée, ondoit conſiderer les proprietez qui ſuivent, ou de la ſuppoſition, ou de la conſtruction de la figure. Si ces ſuites ou conſequences ſe contrarient, on découvre par là l'impoſſibilité de la choſe qui eſt propoſée; ſi cette impoſſibilité ne paroît pas, & qu'ainſi on ait ſujet de croire la queſtion poſſible, on cherche les moyens de la reſoudre, qui ſont 1° La connoiſſance des proprietez qui par les Elemens doivent convenir à la figure qu'on examine. 2° La connoiſſance des angles que font les lignes qui compoſent cette figure, par leſquels on découvre les rapports de ces lignes. 3° Les raiſons & les

proportions de ces lignes étant connuës, on va de connoiſſance en connoiſſance: car comme on l'a vû dans les Elemens, lors que les trois premiers termes d'une proportion ſont connus on peut connoître le quatriême. Dans une progreſſion ſi on connoit ſeulement les deux premiers, on peut connoître tous les autres. 4° On ſçait que des lignes ſont proportionnelles, lors que les triangles qu'elles forment ſont ſemblables, c'eſt pourquoy il faut quand cela ſe peut, reduire toutes les figures en triangles qui ſoient ſemblables.

C'eſt par ce moyen que nous allons trouver la demonſtration de cette propoſition. Que *le produit ou le rectangle fait des diagonales AC & BD, eſt égal à la ſomme des rectangles BC par AD & de AB par DC, côtez oppoſez du quadrilataire ABCD inſcrit dans un cercle.*



Je mene BE de ſorte que l'angle ABE = DBC & par conſequent l'angle CBE eſt égal à l'angle ABD : ſoit AE = o & EC = p & $o + p$, c'eſt à dire, AC = q; ainſi comme les angles ADB & ACB ſont égaux, étant appuyez ſur

le même arc, il s'enſuit que les triangles BDA & BCE ſont ſemblables; donc BD, AD :: BC, CE ou $m, c, :: b, p$, ainſi le produit de BD par CE eſt égal à celuy de AD par BC, c'eſt à dire, $mp = bc$.

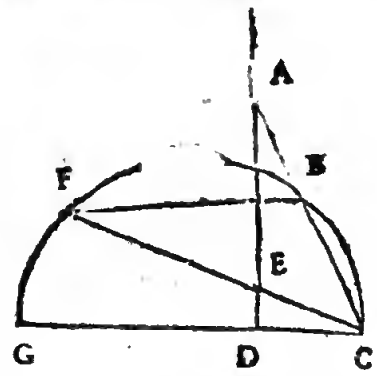
Les triangles BDC, BAE ſont ſemblables, puiſque par la conſtruction ABE = DBC, & que BAC & BDC ont pour meſure la moitié de l'arc BC: donc BD, CD :: AB, AE, ou $m, d, :: a, o$; donc le produit de BD par AE eſt égal à celuy de CD par AB, c'eſt à dire, que $mo = da$: or les produits de BD par AE & par CE parties de AC ſont égaux à celuy de BD par AC; c'eſt à dire, $mo + mp = qm$; ainſi puiſque $mp = bc$ & $mo = ad$; donc $qm = bc + ad$; c'eſt à dire, que le produit des diagonales eſt égal à celuy des côtez oppoſez du quadrilataire.

Cette propoſition eſt tres eſtimée par les Geometres, à cauſe de l'uſage étendu qu'on en peut faire dans la conſtruction des tables des ſinus.

Nous avons expliqué les proprietez des triangles & leurs raiſons, de maniere qu'on peut aller fort loin par l'analogie des triangles.

A D eſt une ligne infinie perpendiculaire ſur le diametre GC, ayant mené de C deux lignes dont la premiere CF coupe AD en E; & la ſeconde coupe le cercle en B, & AD au point A, on dit

que le rectangle de CF par CE eſt égal au rectangle de AC par BC.



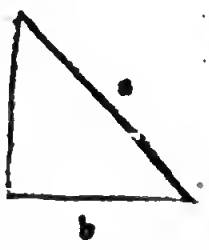
Pour le démontrer je mene de F à B une ligne. L'angle BFC a pour ſa meſure la moitié de l'arc BC, qui eſt auſſi la meſure de DAC : les deux triangles ACE& BFC ayans donc l'angle ACF commun, & par conſequent deux angles égaux, les troiſiémes ſont égaux FBC= CEA, donc AE & BF ſont antiparalelles:donc AC,CF:: EC,BCpartant le rectangle des moyens CF, & EC eſt égal à celuy des extrêmes AC & BC; ce qu'il faloit prouver.

Il en eſt de même de toute autre ligne menée de Cà la ligne AD: cõme auſſi de celles qui ſont menées de G à la ligne AD.

Il faut auſſi remarquer que deux rectangles, l'un fait par une ligne qui vient de C,l'autre par une ligne qui viẽt de G, ſont enſemble égaux au quarré du diametre, ce qui eſt evident, car le rectangle fait de DC par CG avec celuy qui eſt fait de DG par CG eſt égal au quarré de GC, puiſque GD+DC= GC.

Ce que nous avons démontré en ſon lieu, que dans un triangle rectangle, le quarré de l'hipothenuſe eſt égal aux quarrez des côtez, eſt une

ſource feconde d'où l'on peut tirer pluſieurs conſequences ; car ſi *abc* eſt un triangle rectangle dont *a* eſt l'hipothenuſe, par conſequent $aa = bb + cc$, par conſequent $aa - bb = cc$, par conſequent $aa - cc = bb$; ce qui donne moyen d'exprimer la même grandeur en differentes manieres, car par tout où ſera *aa* je puis placer $bb + cc$, où ſera *bb* mettre $aa - cc$, où ſera *cc* mettre $aa - bb$, ſelon qu'il ſera commode.



En examinant un Problême, il faut premierement chercher s'il eſt poſſible, car on ſe donne ſouvent beaucoup de peine en vain. On propoſe de trouver la demonſtration de la regle ſuivante pour avoir la ſolidité d'un fragment de pyramide : j'appelle Z un tel fragment dont les baſes ſont paralelles: l'inferieure eſt 36, & la ſuperieure 9, entre leſquels nombres 18 eſt moyen geometrique. On dit que *ſi on ajoûte ces trois nombres qui ſont 63, qu'on les multiplie par le tiers de la hauteur de ce fragment, qui eſt 2, le produit 126 ſera la ſolidité de ce fragment.* On demande que je trouve la demonſtration de cette regle.

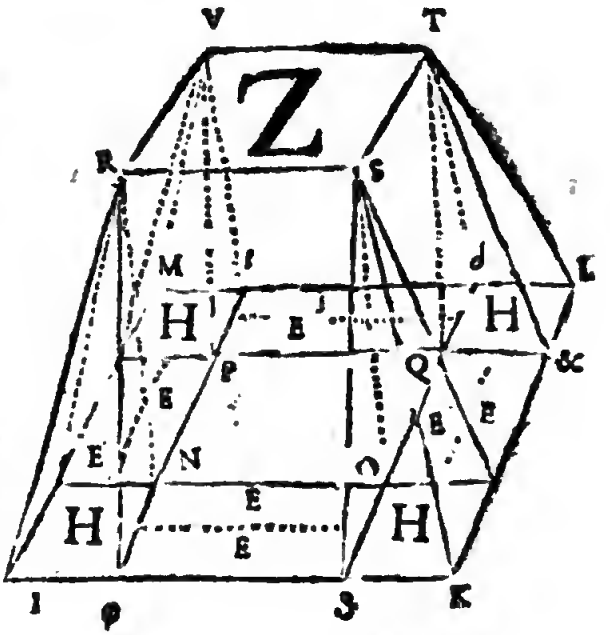
J'examine premierement, ſi je n'appercevray point quelque contradiction manifeſte qui m'aprẽne que cette regle eſt

fauſſe, avant que de me fatiguer à en rechercher la demonſtration. Je conſidere qu'elle eſt toute la ſolidité de la pyramide entiere, dont le fragment eſt connu : ayant trouvé cette valeur, j'en ôte celle de la petite pyramide qui avec le fragment propoſé fait la grande pyramide entiere. Si aprés cela le reſtant eſt 126, c'eſt une marque que la regle eſt bonne ; & afin que ce ne ſoit pas un cas particulier ; j'examine ſi la même choſe arrive en d'autres pyramides: aprés quoy m'étant aſſuré que la regle propoſée eſt bonne, j'en cherche la demonſtration.

Comme la regle dit qu'il faut 1°. ajoûter dans une ſomme les deux baſes de la pyramide Z ; & le moyen proportionnel entre ces deux baſes; 2°. multiplier cette ſomme par le tiers de la hauteur de Z ; cela me fait juger qu'il faut que cette ſomme ſoit le triple de la baſe d'un priſme égal à Z ; car multiplier le triple de la baſe d'un priſme par le tiers de ſa hauteur, c'eſt la même choſe que de multiplier ſa baſe par toute ſa hauteur.

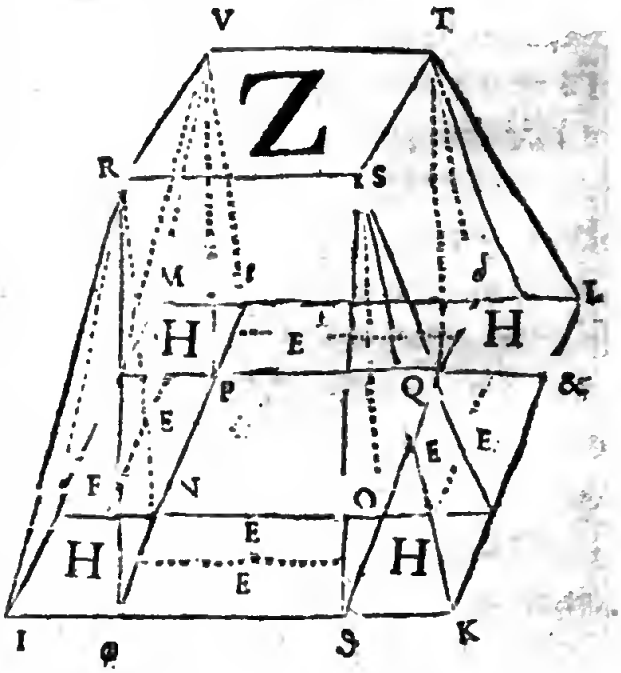
Je nomme B la baſe ſuperieure, D l'inferieure, ainſi B eſt égal à RSTV, ou NOPQ, qui eſt la même choſe & D à IKLM. & C à un plan qui eſt moyen geometrique entre B & D : ſelon que nous venons de dire, B+C+D eſt le triple de la baſe d'un priſme égal à Z.

Si C étoit moyen Arithmetique entre B & D alors B+D ſeroit double de C partãt B+C+D= 3C, mais puiſque C eſt moyen Geometrique entre B & D, la differẽce de B à C n'eſt pas la même que celle de C à D, par conſequent B + C + D excede le triple de C, de l'excês de la difference de D à C par deſſus celle de B à C: lequel excês je nomme G: ainſi B+C+D − G= 3C, ou B+C+D= 3C+G,& puiſque B+C+D eſt le triple de la baſe d'un priſme égal à Z donc C+$\frac{1}{3}$ G ſera égal à cette baſe, ce qui eſt vray, comme nous l'allons démontrer, aprés avoir examiné de quelles parties eſt compoſé le ſolide Z.



Il eſt conſtant que Z eſt égal 1° au parallilipipede NQRT; donc NOPQ eſt la baſe. 2° à quatre priſmes égaux chacun au priſme O & S T, qui ont pour baſe chacun le paralelogramme EE, ou à quatre parallelipipedes égaux qui ont chacun E moitié de EE pour baſe. 3° à

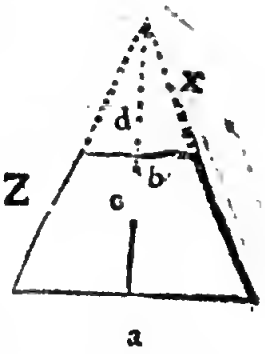
quatre pyramides égales chacune à la pyramide KOS. dont la baſe eſt H, ou à quatre priſmes, dont le tiers de H eſt la baſe, & OS la hauteur: ainſi la baſe du ſolide égal à Z eſt la valeur de NOPQ, plus 4E, plus quatre tiers de H, à quoy il faut montrer, que $C + \frac{1}{4}G$ eſt égal, ou que $B + 4E + \frac{4}{3}H = C + \frac{3}{4}G$.



Il eſt evident que 4E + B, c'eſt à dire, 4E, plus NOPQ ſont égaux à ϕ ſ ϑ, or ce parallellogrãme eſt moyen Geometriq; ẽtre le quarré B & le quarré D, ou entre IKLM & NOPQ, puis qu'il eſt produit par la multiplication des racines de B & de D, c'eſt à dire, de ϕ par ſ, dõc il eſt auſſi égal à C, qui par l'hipotheſe eſt un moyen proportionnel entre B & D, ou entre IKLM & NOPQ: il ne reſte donc plus qu'à faire voir que 4H = G: or 4E eſt la difference entre C & B & 4E + 4H eſt la difference entre D & C: l'excez de 4E + 4H par deſſus 4E, difference de C

avec B, eſt 4H : donc 4 H= G, qui eſt le même excês. Nous avons dit que B+4E +$\frac{4}{3}$H eſt égal à la baſe du ſolide égal à Z; [3] Donc puiſque C= B+4E & G= 4H il faut que C+ $\frac{1}{3}$G= B+4E+$\frac{4}{3}$H, ce qu'il faloit prouver. [3]

Je joindray à la demonſtration precedante celle qui ſuit qui eſt plus courte; elle peut ſervir d'exemple de la difference qu'il y a entre éclairer & convaincre l'eſprit. Soit *a* la baſe inferieure, *b* la ſuperieure du fragment Z dont *c* eſt la hauteur, *d* eſt le reſte de l'axe qui manque pour achever la pyramide. En mulipliant *aa* par tout l'axe *c*+*d*, le produit *aac*+*aad* ſera le triple de toute la pyramide, d'où ayant ôté *bbd*, qui eſt le triple de la petite pyramide X, on aura *aac*+*aad*−*bbd*= 3Z: ſelon la regle propoſée dont on recherche la demonſtration *aac*+*bbc*+*abc*= 3Z (car remarquez que je multiplie *aa*+*bb*+*ab* non par le tiers de la hauteur de Z, mais par toute la hauteur *c*) il faut donc demontrer que *aac*+*bbc*+*abc*= *aac*+ *aad* −*bbd*.



1° *a*− *b*, *b* : : *c*, *d*; multipliant *a* − *b* & *b* par *a*+*b*, on a *aa* −*bb* & *ab*+*bb*, ainſi *aa*− *bb*, *ab*+*bb* : : *c*, *d*: multipliant les extrêmes & les moyens on a *aad*− *bbd*= *abc*+*bbc*:

à la place de $aad - bbd$, ſubſtituant $abc + bbc$ qui luy eſt égal : on aura $aac + abc + bbc = aac + aad - bbd$, ce qu'il faloit prouver

CHAPITRE V.

Les principales Regles de la Methode.

POur rendre ce diſcours de la Methode plus intelligible, je rangeray de ſuite les principales Regles, comme je l'ay fait dans le 7e Livre de la Grandeur.

Premiere Regle.

Tout n'étant pas inconnu dans une queſtion, on en ſçait aſſez pour repreſenter la choſe dont il s'agit, & la ſuppoſer comme faite, & c'eſt par là qu'il faut commencer.

C'eſt ce que nous venons de dire dans les Chapitres precedens.

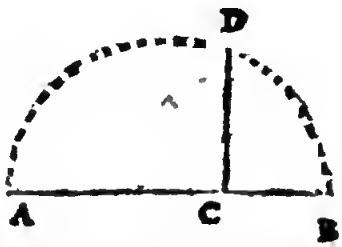
Seconde Regle.

Selon qu'une queſtion eſt propoſée, nous pouvons connoiſtre ſi pour la conſtruction de ce qu'il faut faire il dépend de nous de choiſir certaines grandeurs, & par conſequent ſi la queſtion eſt determinée ou indeterminée.

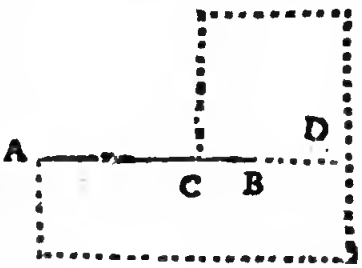
On propoſe de couper la ligne AB,

de ſorte que le rectangle de ſes deux parties, ſoit égal à un quarré d'une de ſes parties.

Je coupe AB au hazard en C. J'éleve la perpendicul. CD moyenne entre AC & BC dont le quarré eſt égal au rectangle de AC & & de BC:cette ligne CD qui ſera plus petite que AB,ſera une de ſes parties; ainſi j'ay ſatisfait au Problême. Je pouvois couper AB ailleurs qu'en C; ce Problême eſt donc indeterminé, c'eſt à dire, qu'on y peut ſatisfaire en differentes manieres.



Un Problême eſt dit determiné, lors qu'il ne peut être fait qu'en obſervant une certaine choſe qui le determine, & qui ne dépend point du choix de celuy à qui il eſt propoſé. Par exemple,ſi on propoſe de prolonger AB diviſé en C, juſques en D, de ſorte que le quarré de C D ſoit égal au rectangle de AD & de BD; alors comme ce prolongement BD eſt déterminé, c'eſt à dire,qu'il a une certaine longueur preciſe, ce Problême eſt determiné.



On connoit qu'un Problême eſt inde-

terminé lors qu'on ne trouve point d'equations entre les grandeurs dont il eſt parlé dans ce Problême: car il eſt facile de trouver des equations entre deux grandeurs determinées, lors qu'on en connoît les rapports. Par exemple, ſi Z eſt le tiers de X, il eſt evident que $3Z = X$, & ſi la difference de Z à X eſt b que $Z + b = X$ ou $X - b = Z$: ainſi quand on ne trouve point d'equations, c'eſt une marque qu'il n'y a point de rapport determiné entre les grandeurs qu'on propoſe de trouver, & par conſequent que ces grandeurs ſont indeterminées, que celuy qui propoſe le Problême n'en avoit point de particulieres, ainſi on en peut ſuppoſer de telles, que par leur moyen on peut ſatisfaire à ce qui eſt propoſé.

C'eſt à quoy il faut bien prendre garde, car dans un Problême indeterminé, toutes les grandeurs qu'on peut choiſir à diſcretion ſont connuës, puis qu'on les choiſit: ce qui fait qu'aprés ce choix, le Problême qui auparavant eſtoit difficile, devient tres aiſé.

Troiſiéme Reglē.

On doit étudier avec ſoin ce qu'il faut chercher dans une queſtion; en ſuite marquer ce qui eſt connu, & le diſtinguer de ce qui ne l'eſt pas.

C'eſt une regle de bon ſens que nous

avons expliquée dans le 7e Livre de la Gr. Nous avons dit que les Grandeurs connuës ſe marquent avec les premieres lettres de l'alphabet, & les inconnuës avec les dernieres.

Quatriéme Regle.

Dans une queſtion on découvre quelle eſt la valeur d'une grandeur inconnuë par les proprietez de la figure qui a été faite pour reſoudre cette queſtion, & par les rapports connus que ces grandeurs inconnuës ont avec celles qui ſont connuës.

Si par exemple x eſt le côté d'un triangle rectangle dont les deux côtez a & b ſont connus; il eſt evident que ſi x eſt l'hipothenuſe $xx = aa + bb$, ſi b eſt l'hipothenuſe $bb - aa = xx$.

On reduit, comme il a été dit, les figures en triangles dont on connoit les angles par la conſtruction de la figure, & par les cercles dans leſquels on peut les concevoir inſcrits ou circonſcrits. Si ces triangles ſont ſemblables, on découvre en ſuite les raiſons & les proportions de ces lignes. Quand on connoit le rapport d'une grandeur inconnuë, avec celle qui eſt connuë, elle devient connuë, car ſi x eſt le tiers de b, donc $3x = b$; ſi x eſt moyenne proportionnelle entre b & c, donc $xx = bc$.

Cinquiéme Regle.

En examinant quels ſont les rapports des grandeurs dont parle le Problême qui a été propoſé, on ouvre le moyen de les exprimer en deux manieres, ce qui s'appelle, equation.

Car ſi je ſçay que x eſt l'hipothenuſe d'un triangle rectangle dont b & c ſont les côtez, puiſque $xx = bb + cc$: J'ay deux noms ou deux ſignes pour exprimer la même grandeur ; au lieu de xx je puis mettre $bb + cc$: ſi je ſçay que $x + b = z$; par tout où ſera $x + b$, je puis mettre z en ſa place : ſi x eſt le tiers de b, j'exprimeray la même grandeur en l'appellant ou x ou $\frac{1}{3} b$; ainſi en connoiſſant les rapports des grandeurs ; on peut trouver des expreſſions differentes quant à leurs ſignes, qui n'ont qu'une même valeur ; ce qui eſt d'une grande utilité.

Sixiéme Regle.

Il faut exprimer les differens termes d'une queſtion ; de ſorte que ſi cela ſe peut, il n'y ait qu'une ſeule lettre inconnuë.

C'eſt à dire ; qu'il n'y ait qu'une des dernieres lettres de l'alphabet dont on ſe ſert pour marquer les grandeurs inconnuës. Cela ſe peut faire, parce que comme nous venons de le dire, ce qu'on

connoît d'une queſtion ouvre le moyen d'exprimer en differentes manieres la même grandeur, & quand cela ne ſe peut pas, c'eſt une marque que le Problême eſt indeterminé: ainſi on peut alors choiſir à diſcretion des grandeurs connuës, avec leſquelles on pourra reduire les expreſſions de tous les termes de la queſtion, de ſorte qu'il n'y ait qu'une des dernieres lettres de l'alphabet.

Septiéme Regle.

Ayant une equation, ou une double expreſſion, dans laquelle il n'y a qu'une grandeur inconnuë, il faut faire en ſorte que tout ce qui eſt connu ſe trouve d'un des côtez du ſigne de l'egalité, & qu'on faſſe paſſer de l'autre côté ce qui eſt inconnu.

Si par exemple, $bb = xx + aa$, la grandeur inconnuë xx étant mélée avec aa, qui eſt une grandeur connuë, je faits paſſer aa de l'autre côté, & vient $bb - aa = xx$.

Lors que cela ſe peut faire, & qu'un des membres de l'equation eſt tout connu, & que dans l'autre membre la grandeur inconnuë ſe trouve ſeule, la queſtion eſt reſoluë, car ſi $bb - aa = xx$, ayant ôté aa de bb, ſuppoſant que le reſte ſoit cc, nous aurons cette equation $cc = xx$, partant $c = x$.

Je ne repete point icy par quels mo-

yens on peut faire passer une grandeur d'un membre dans un autre ; cela a été enseigné en son lieu l. 7e de la Grandeur.

Huitiéme Regle.

Il faut reduire les termes d'une question aux termes les plus simples.

Nous avons parlé avec étenduë de ces reductions *l. 7e Grandeur.* Nous y avons vû qu'un des grands secrets de la methode est de donner des noms convenables. On peut diviser un tout en tant de parties qu'on voudra, & le nommer par une seule lettre, ou par plusieurs qui expriment les parties de ce tout. Par exemple, je puis supposer que B est divisé en trois parties dont chacune est *b*, ainsi puisque B= 3*b*, selon qu'il sera à propos, je marqueray la même grandeur, ou par B, ou par 3*b*.

Il faut reduire les differentes grandeurs d'une question aux mêmes signes: ce qui se peut faire en differentes manieres. Par exemple, si ÷ *b*, *x*, *z*, *y*, en supposant *b*= 1, je puis exprimer ces quatre termes *b*, *x*, *z*, *y* de cette maniere où il n'y a qu'un seul signe ÷ 1, *x*, *xx*, *xxx*, car *par la pr.* 11. *l.* 4. *G. b* ou 1. est à *z* comme le quarré de *b* ou de 1, est à celuy de *x*. c'est à dire *b*, *z* :: *bb*, *xx*, ou 1, *z* :: 1, *xx*, ainsi puisque *xx*= *z*, je puis substituer *xx* à la place de

ce de z, & *par la prop.* 12 *l.* 4. *Gr.* $b, y :: bbb, xxx$, ou 1, $y :: 1, xxx$: donc puiſque $x^3 = y$, au lieu de y je place x^3, ainſi je reduits ces quatre grandeurs b, x, z, y, à celles-cy $1, x, x^2 x^3$. Il y a cent manieres ſemblables.

CHAPITRE VI.

Les Problêmes que l'on entreprend de reſoudre par l'ordre qui eſt icy expliqué, & que nous avons appellé ailleurs Analyſe, ſe diſtinguent en certaines claſſes : ils ſont ou lineaires, ou plans, ou ſolides.

LOrs qu'on a reduit l'equation dont on ſe ſert pour la reſolution d'un Problême, aux termes les plus ſimples ; ce Problême eſt appellé ou lineaire, ou plan, ou ſolide, ſelon que le membre de l'equation qui eſt inconnu, eſt d'une, ou de deux, ou de trois dimenſions. Si par exemple $x = b$, comme x n'a qu'une dimenſion, ce Problême qui ſe reſoud par cette equation eſt lineaire. Dans cette equation $xx = ab + xb$, la grandeur x monte juſques au ſecond degré : x eſt un plan, ainſi le Problême pour la reſo-

lution duquel cette equation eſt employée, ſe nomme plan. Enfin un Problême eſt ſolide lors que l'equation dont on ſe ſert pour le reſoudre eſt de pluſieurs dimenſions, comme celle-cy, $xxx = xd + aa + xa$, ou x, monte à la troiſiéme dimenſion, ainſi de ſuite.

Tous les Problêmes ne peuvent pas être lineaires, parce que l'on ne peut pas tellement debarraſſer les grandeurs connuës des inconnuës, que les unes & les autres ſe trouvent ſeparément comme dans cette equation où je ſuppoſe qu'aprés toutes les reductions poſſibles, on a $xx = xb + aa$; vous voyez que x eſt mélé avec b, l'inconnu avec le connu, de ſorte que l'on ne peut pas dire preciſément quelle eſt la valeur de x, & le comparer avec une grandeur toute connuë, à laquelle il ſe trouve preciſément égal.

Voicy comme on arrive aux equations de pluſieurs dimenſions. Lors qu'on ſçait par les conditions d'une queſtion, qu'une grandeur telle que a étant multipliée par elle-même, eſt égale au produit de x multiplié par z deux grandeurs inconnuës, & qu'on connoit le rapport qu'ont entr'elles ces grandeurs inconnuës, par exemple que $x = z - a$, multipliant z par x, ou par $z - a$, on aura cette equation $zz - za = aa$ ou $zz = aa + za$, laquelle equation eſt de deux dimenſions, & par con-

ſequent le Problême par lequel l'on cherche les valeurs de x & de z eſt plan.

On ſçait que le produit de ces trois grandeurs z, x, y, eſt égal au cube de a: on a trouvé par ce qui eſt connu dans la queſtion que $z = x + b$, & $y = x + c$, ainſi multipliant ces trois grandeurs, x, $x+b$, $x+c$, par elles mêmes, on a cette equation $a^3 = x^3 + xxb + xxc + xbc$, laquelle equation a trois dimenſions, ainſi le Problême eſt ſolide.

On reduit à de certaines formules les équations de deux ou de pluſieurs dimenſions. On les transforme en differentes manieres par les additions ou diminutions qu'on y peut faire pour reduire à des formes convenables qui en facilitent la reſolution. Voyez le 3e Liv. de la Geometrie de Deſcartes, où cela eſt expliqué exactement, comme auſſi dans les Elemens de Mathematique du P. Preſtet. Je ne veux point toucher preſentement à cette matiere; parce que ſon utilité regarde les Elemens des lignes courbes, ainſi je reſerve à ce lieu d'en traitter à fond. Les Problêmes ſolides ne ſe peuvent reſoudre, parce que nous avons enſeigné dans les deux premiers volumes de nos Elemens; ainſi ce ſeroit inutilement que je parlerois des preparations que l'on doit faire d'une équation de plus de deux dimenſions,

pour la reſoudre, puiſque cela ne ſe peut faire que par le moyen des lignes courbes dont l'on n'a point encor parlé.

Il eſt facile de reduire les equations de deux dimenſions aux mêmes formules, par exemple à celle-cy $xx = aa - xd$ ou $xx = aa + xd$: car ſi $xx = ab - xd$, comme ab eſt une grandeur connuë en prenant $ab = cc$ j'auray cette equation $xx = cc + xd$. Pour changer le plan ab dans un quarré il faut chercher entre a & b une moyenne proportionnelle, laquelle étant nommée c, puiſque $cc = ab$, je puis ſubſtituer cc en la place de ab. Si $xx = xd + c$, puiſque c eſt une grandeur connuë, je puis ſuppoſer que ſa valeur eſt égale à la grandeur bb, ainſi que $xx = bb + xd$: or pour trouver le quarré bb qui égale c, je cherche une moyenne proportionnelle entre l'unité & c, laquelle étant nommée b, il faut que $bb = 1c$, ou $bb = c$, puis qu'une grandeur multipliée par l'unité ne devient pas plus grande aprés cette multiplication.

CHAPITRE VII.

Des lieux Geometriques, ou des Problêmes qui ſont un lieu Geometrique.

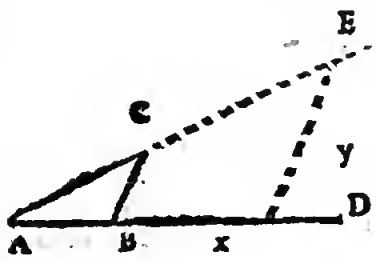
ON appelle lieu Geometrique toute ligne ou droite ou courbe dont

tous les points ont un même rapport aux points d'une même ligne droite ou courbe, au regard de l'un des points de cette ligne. Et cela eſt fort bien appellé lieu ; car le lieu, par exemple, d'un cercle, ſont tous les points qui ont un certain rapport avec le point d'une ligne droite ; c'eſt à dire, le même rapport avec cette ligne droite que ce cercle a avec cette ligne ; de ſorte qu'en connoiſſant ces rapports, & par ce moyen les points par où doit paſſer ce cercle, on connoit ſon lieu, c'eſt à dire, le plan où il eſt

Ces rapports ſe peuvent marquer par une ſeule equation ; ainſi par la nature d'une equation qui eſt connuë on connoit la nature d'une ligne quelle qu'elle ſoit, & ſon lieu ou ſa place, ce qui eſt la connoître entierement. C'eſt pourquoy comme cette ſcience des lieux eſt d'une grande utilité, les Geometres ſe ſont appliquez avec un ſoin particulier à la perfectionner. Elle conſiſte particulierement à reduire les equations que l'on trouve à de certaines formules, dont nous venons de parler dans le Chapitre precedent. Les lignes droites & circulaires nous ſont aſſez connuës ; ainſi la methode des lieux n'eſt neceſſaire que pour les lignes courbes, dont nous ne parlons point encore, neanmoins pour

donner quelque notion de cette methode : j'en donneray des exemples ſur les lignes droites & ſur les cercles.

Soit AB$=a$ & BC$=d$: il eſt evident que $a, d :: x. y$, donc $ay=dx$, & diviſant par a, le quotient $\frac{dx}{a}$ ſera egal à y, c'eſt à dire, $\frac{dx}{a}=y$, & cette equation marquera le rapport de tous les points de la ligne AE prolongée à l'infini avec la ligne AD, prolongée auſſi à l'infiny: car par x nous pouvõs entendre quelque partie que ce ſoit de la ligne infinie AD, & par y toute ligne menée de l'extremité de x à la ligne AE faiſant même angle avec AD que la ligne BC, c'eſt pourquoy cette equation $\frac{dx}{a}=y$ marque le lieu de cette ligne AD, & fait connoître ſa nature qui eſt, comme il a été démontré que $a, d, :: x, y$, & qu'ainſi $ay=dx$, & partant $\frac{dx}{a}=y$.

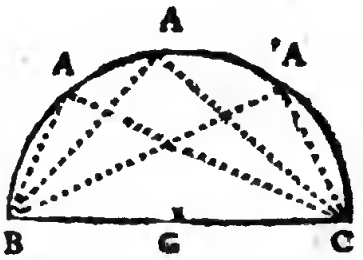


Si donc on propoſoit de trouver une ligne telle qu'elle ſoit, avec cette condition : 1° qu'ayant mené de cette ligne deux autres lignes droites ſur une quatriéme ligne droite connuë, avec laquelle elles faſſent les mêmes angles ; 2° que ces quatre lignes que je nomme a, d, x, y

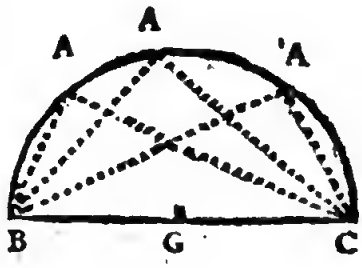
ſoient proportionnelles; 3° qu'on puiſſe exprimer le rapport de cette ligne que l'on cherche avec la droite qui eſt donnée par cette equation, $\frac{dx}{a} = y$, il eſt evident que cette ligne inconnuë ſeroit une ligne droite.

Ce Problême, ſelon la maniere de parler des Geometres, eſt un lieu; puis qu'il s'agit de trouver le lieu ou la place d'une ligne; qu'on connoit, quand on peut connoître tous les points par où elle paſſe : car ayant élevé ſur la ligne donnée que je ſuppoſe être AD les lignes BC & y que je ſuppoſe être proportionnelles, je ſçauray que cette ligne dont il eſt queſtion, doit paſſer par C & par le ſommet de y.

La ligne BC eſt donnée, on propoſe de trouver le lieu d'une ligne, de tous les points de laquelle ayant mené deux lignes, que j'appelle x & y aux extremitez de BC, elles faſſent toujours le même angle; & que leurs quarrez ſoient égaux à celuy de BC que je nomme a, de ſorte que cette equation ſe trouve toujours $aa = xx + yy$, il eſt evident que ce Probleme ſe reſoudroit en coupant BC par le milieu au point G, & de G,



comme centre, & de l'intervalle BG ou CF faiſant un demy cercle. Car 1° *par le Coroll. 1. du Theor.* 12, §. 1. *l.* 2. ayant mené de chaque point de la circonference des lignes à B & à C, ces angles BAC ſont tous égaux. 2° Puiſque ces angles ſont droits, *par le Coroll. 3 du même Theorême* les quarrez des côtez qui comprennent ces angles droits ſont égaux à celuy de l'hipothenuſe BC, *par le Th.* 4. §. 3 *l.* 3. par conſequent le lieu de cette ligne qui étoit propoſé eſt un demy cercle, c'eſt à dire, qu'elle eſt circulaire. En voila aſſés pour avoir une idée de ce que c'eſt que les Geometres appellent lieu.



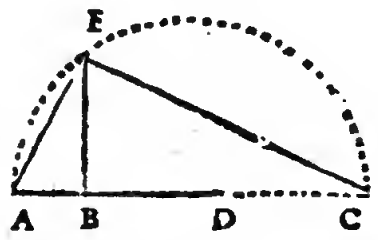
CHAPITRE VIII.

De la conſtruction ou effection Geometrique des equations d'une & de deux dimenſions.

ON appelle conſtruction ou effection Geometrique d'une equation ce qu'on fait pour exprimer par une ligne la valeur d'une grandeur inconnuë

que l'on a cherchée, & ſes rapports avec les grandeurs connuës qu'on exprime auſſi par lignes. La conſtruction des equations d'un degré eſt facile, puis qu'il ne s'agit que de faire une ligne égale à des grandeurs entierement connuës, auſquelles la grãdeur connuë ſe trouve preciſémẽt égale comme dans cette equatiõ $x = \frac{bb}{a-b}$ Puiſque b & $a-b$ ſont des grãdeurs connuës, que par exemple $bb = 16$ & $a-b = 2$, il eſt clair que $x = 8$, & qu'ainſi il eſt facile d'exprimer par une ligne la valeur de x. On peut auſſi reſoudre cette equation $x = \frac{bb}{a-b}$ en cette progreſſion $\div a-b, b, x$, car multipliant b, le terme moyen par luy même, & diviſant le produit, qui eſt bb, par $a-b$ premier terme de la progreſſion, le quotient qui eſt $\frac{bb}{a-b}$ ſera égal au 3e, ſçavoir à x, ce qu'on peut exprimer ainſi par lignes.

Je faits AD $= a$ & AB $= a-b$, ainſi $b =$ BD: ſur AD au point B j'éleve la perpendiculaire BE égale à BD: de A je mene à E une ligne droite, & ſur AE au point E je mene perpendiculairement E C qui coupe la ligne AD prolongée : alors l'angle



CEA eſt droit, ainſi ayant décrit un cercle par ces trois points, il eſt evident que ∴ AB, EB, BC, ou ∴ $a-b$, b, BC, partant BC = x.

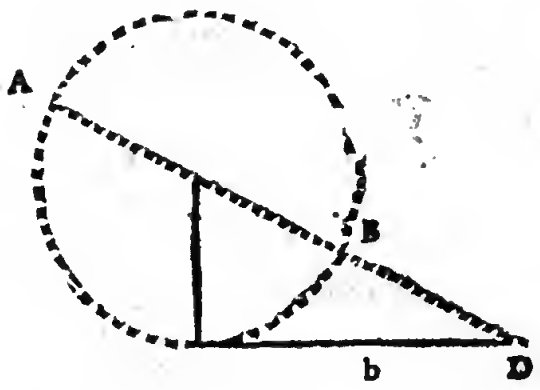
On reduit les equations de deux dimenſions à de ſemblables formules $xx = ax+bb$, ou $xx = ax-bb$, ou $xx = bb-ax$, comme nous l'ayons vû cy-deſſus ch. 6e. Aprés quoy il s'agit de trouver la grãdeur inconnuë x dont on ſçait que le quarré xx eſt égal à un quarré connu bb, plus à un plan ax, ſelon la premiere formule fait de x & d'une grandeur connuë, ou ſelon la ſeconde formule xx eſt égal à ce plan ax moins le quarré d'une grandeur connuë, ou ſuivant la 3e xx eſt égal au quarré d'une grandeur connuë moins un plan fait de a une grandeur connuë, & de x qui eſt inconnu.

Problême premier.

$yy = bb+yd$, trouver la valeur de y.

J'éleve ſur l'une des extremitez de b une perpendiculaire égale à la moitié de d. Du ſommet de cette perpendiculaire comme centre & de l'intervalle de cette perpendiculaire, je faits un cercle, & par ſon centre je mene une ſecante juſques à D.

La ligne *b* eſt une tangente par la conſtruction, & puiſque le rayon de ce cercle eſt égal à la moitié de *d*, tout le diametre AB = *d* : je nomme *y* la ſecante AD & *x* la partie BD qui eſt hors le cercle.



Puiſque le tout multiplié par les parties eſt égal au produit du tout par le tout $yy = yd - yx$: or *par le Th. 9, §. 1. l. 3.* ∴ *y*, *b*, *x*, donc $yx = bb$, ainſi en ſubſtituant dans l'equation precedente $yy = yd - yx$, le quarré *bb* en la place de *yx*, nous aurons $yy = bb + yd$; ainſi en faiſant ce que l'on a fait on a trouvé la ligne AD, qui eſt égale à la grandeur *y* auparavant incõnuë.

Scholie.

Il ſeroit facile de trouver la valeur de la ligne *y* en nombre. Les Geometres aiment mieux trouver une ligne égale à la grandeur inconnuë qu'ils cherchent, parce que ſouvent ces grandeurs ſont des racines ſourdes qui ne ſe peuvent exprimer par nombres. Neanmoins je crois que les racines ſourdes ſont en quelque maniere plus connuës que les lignes. Car ſi par exẽple un quarré vaut 18, l'eſprit n'apperçoit point ſi clairement la valeur d'une ligne qu'on a trouvé égale à la racine de 18, c'eſt à dire, qui eſt un des côtez de ce quarré, qu'il fait la valeur de ce ſigne. R 18.

Problême ſecond.

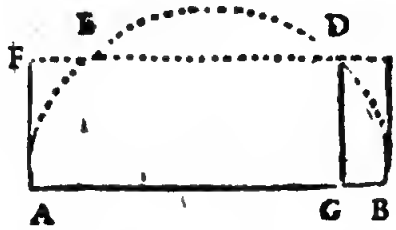
$xx = bb - xd$, on cherche la valeur de *x*.

On fait la même choſe que dans le Problême precedent. Les lignes ont le même nom ; on trouve que la valeur de x eſt BD, car *par le Theorême 9. §. 1. l. 3.* $\div x, b, x+d$, donc $xx+xd = bb$; & en ôtant de part & d'autre xd on aura $xx = bb-xd$, qui étoit l'equation propoſée, ainſi BD eſt la valeur de x.

Probléme troiſiéme.

$xx = xd-bb$ on cherche la valeur de x.

On fait un cercle dont le diametre AB eſt égal à la grandeur d qui eſt connuë : au point B on éleve une perpendiculaire, ou tangente égale à l'autre grandeur connuë, ſçavoir, à b : par le ſommet de cette tangente, c'eſt à dire, par C, on mene FC paralelle au diametre du cercle. Si cette paralelle F C ne coupe pas le cercle, parce que b eſt égale ou plus grande que la moitié de d, c'eſt à dire, que le rayon du cercle. Alors le Problême eſt impoſſible, c'eſt à dire, qu'il eſt faux que $xx = xd-bb$, puiſque b eſt trop grand au regard de x, pour que cela puiſſe être. Si cette paralelle F C coupe le cercle, je mene par A une pa-



ralelle à BC, ſçavoir AF, aprés quoy je dis que ſi x eſt plus petite que b, ſa valeur ſera DC, & FD, ſi il vaut plus que b ce qui ſe démontre ainſi.

Soit FD ou EC$=x$ & DC$=y$, *par le Th. 7 § 1. l. 3.* $\div$ A G, DG, GB, & par conſequent puiſque AG$=x$ & DG$=b$ & GB ou DC$=y$, donc $\div x, b, y$ donc $xy=bb$. Nous avons ſuppoſé $d=$ AB, partant $d=x+y$, laquelle equation $d=x+y$ étant multipliée par x, il vient $xd=xx+xy$. J'en retranche la precedante equation $xy=bb$, ce qui me donne $dx-bb=xx-xy+xy$, & puiſque $+xy-xy=0$, je reduiray cette equation à celle cy $dx-bb=xx$ ce qui fait voir la verité qu'il faloit démontrer.

CHAPITRE IX.

Les equations de deux dimenſions ſe peuvent reduire à une progreſſion de trois termes, ce qui donne un moyen plus naturel pour reſoudre les Problêmes plans.

ON peut reduire les equations de deux dimenſions à une progreſſion

de trois termes. Par exemple, cette equation $yy = bb + yd$ ſe reduit en cette progreſſion $\div y - d, b, y$, car $yy - yd = bb$ & ajoûtant yd de part & d'autre $yy = bb + yd$, qui eſt la même equation que celle qui étoit propoſée.

Cette equation $zz = bb - zd$ ſe reduit à cette progreſſion $\div z + d, b, z$; car ainſi $zz + dz = bb$, & retranchant de part & d'autre dz, vient $zz = bb - zd$, qui eſt la même equation que celle qui étoit propoſée.

Cette equation $zz = zd - bb$ ſe reduit en cette progreſſion $\div z, b, d - z$. Car $zd - zz = bb$, ajoûtant de part & d'autre zz; il vient $zd = bb + zz$, & retranchant de part & d'autre bb, nous avons $zd - bb = zz$ qui eſt ainſi la même equation que celle qui étoit propoſée.

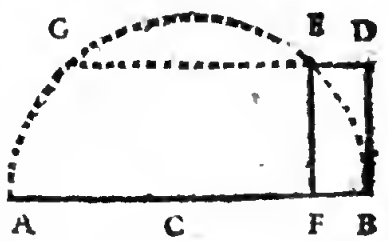
Dans les deux premieres progreſſions, ſçavoir, $\div y - d, b, y$ & $\div z + d, b, z$. le terme moyen b eſt connu, & par conſequent la valeur du produit des extrêmes égal au quarré de b. On connoit auſſi la difference des extrêmes qui eſt d. Dans la troiſiéme progreſſion qui eſt $:: z, b, d - z$. on connoit b le terme moyen, & d qui eſt la ſomme des extrémes. Car $d - z$ eſt le dernier terme & z le premier, ainſi d ſeul vaut z, le premier terme & le dernier terme, qui eſt d moins z.

Ainſi en cherchant par l'Analiſe la reſolution d'un Problême, aprés qu'on eſt venu à quelqu'une des trois equations precedentes, il les faut reduire en une progreſſion de trois termes, dans laquelle la moyenne proportionnelle eſt toujours connuë, & il ne s'agit que de connoître les deux extrêmes dont l'on connoit ou la ſomme de l'un joint à l'autre, ou la difference des deux.

Problême premier.

Soit cette progreſſion de trois lignes ∴ z, b, x &, & $z+x=a$ connoiſſant la moyenne b, & a ſomme de x & de z les extrêmes, connoître les extrémes.

Je prends AB égal à a ſomme des extrêmes. De C milieu de AB comme centre & de l'intervalle AC ou CB je faits un cercle. Sur B j'éleve perpendiculairement BD êgale à la moyenne b, & par le ſommet D je mene DG paralelle à AB, & de E où DG coupe le cercle, j'abaiſſe EF, une perpendiculaire ſur AB, qui eſt égale à BD, ainſi $EF=b$; donc puiſque ∴ AF, EF, FB : les extrêmes ſeront AF & FB: ainſi ſi z eſt le grand extréme, il ſera égal à

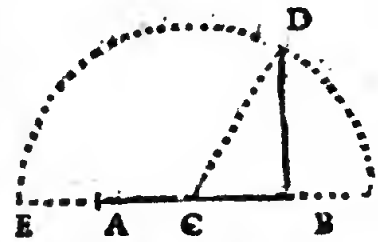


AF, & FB, qui eſt le petit extrême, ſera égal à y, partant z & y ſeront connus.

Probléme ſecond.

Soit cette progreſſion de trois lignes $\div\div x+d, b, x$, ou $\div\div x-d, b, x$, la moyenne b eſt connuë, & d la difference des extrêmes $x+d$ & x, connoître la valeur de x.

Je faits AB égale à d, & ſur B, j'éleve perpendiculairement BD égale à b en ſuite de C, moitié de AB, & de l'intervalle CD je faits un cercle. Je prolonge AB de part & d'autre; juſques à la circonference du cercle, aprés quoy AE, ou BF $= x$, car $\div\div$ EB, BD, BF: donc $\div\div x+d, b, x$.

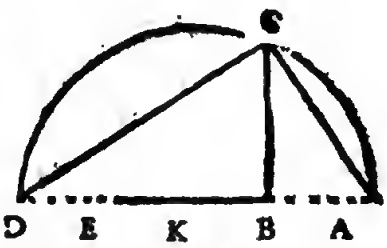


Si la progreſſion eſt $\div\div x-d, b. x$ il faut faire la même choſe, mais en ce cas $x =$ EB: le plus petit terme eſt BF égal à EB $-$AB, ou à $x-d$. Il eſt evident que la difference de $x-d$ & de x eſt d. Quand le ſigne eſt $+$ la grandeur x eſt EA. à laquelle on ajoûte la difference d pour avoir le plus grand extrême. Quand le ſigne eſt $-$ on retranche d de EB ou FA qui eſt la valeur de x. Il eſt evident que $\div\div$ EB, BD, AF $-$ AB: ou $\div\div x, b, x-d$.

Prob.

Problême troiſiéme.

Soit cette progreſſion de trois lignes ∴ $d + x, b, d$, la moyenne b étant connüe connoître la difference des extrêmes $d + x$ & d laquelle eſt x.



Sur B extremité de A B égale à d j'éleve perpendiculairement B C égale à b, par A&C je mene une ligne droite ſur laquelle au point C ie fais une perpendiculaire qui eſt C D, ainſi l'angle ACD eſt droit. Je prolonge AB juſques à ce qu'elle coupe CD, la ligne BD aprés en avoir ôté AB ſera égale à x, car ayant coupé AD par la moitié au point K, & de l'intervale AK ou KD fait un cercle, ce cercle paſſera par C, ainſi ∴ AB ou d, BC ou b, BD, partant BD = $d + x$ qui eſt le troiſiéme terme; ayant donc retranché de BD la ligne DE = AB le reſte B E ſera égal à x dont on cherchoit la valeur.

CHAPITRE X.

De la transformation des grandeurs.

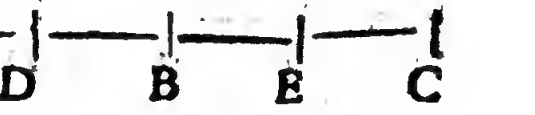
PUiſque l'on veut donner icy une idée generale de l'analyſe, il faut dire un

mot de la transformation des équations, c'eſt à dire, de la maniere de changer leurs expreſſions, ſans que leur valeur augmente ou diminüe. On fait ces changemens pour faire paroître une equation ſous une forme plus commode,& qui en faſſe appercevoir la reſolution, auſſi c'eſt en cela que conſiſte le grand ſecret de la bonne methode, comme nous l'avons vû par une infinité d'exemples.

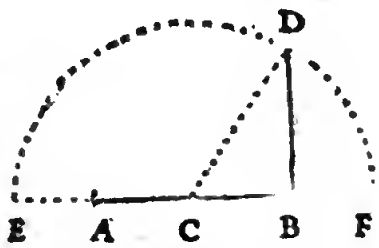
Par la transformation d'une équation, l'on n'entend que les changemens qui ſe font dans les lettres qui marquent les grandeurs inconnuës. On a dit que pour reduire une équation à des termes plus ſimples, quant on a pluſieurs grandeurs connuës, il en faut prendre une ſeule qui ſoit égale à toutes celles-là : Par exemple ſi $xd + xb = xx$ prenant $c = b + d$ il eſt evident que $xc = xx$. Ces changemens ſe peuvent faire auſſi ſur les racines inconnuës d'une équation qu'on peut augmenter ou diminüer de quelque quantité connuë : Au lieu du terme inconnu, il en faut ſuppoſer un autre qui ſoit plus ou moins grand, de cette même quantité, & le ſubſtituer par tout en la place du premier : Comme ſi $xx = xd + bb$, dont les racines ſont $x+d, b, x$, & qu'on veüille augmenter cette équation de 3. Il faut prendre y, qu'on ſupo-

ſera égal à $x + 3$, ainſi $y - 3 = x$, en ſuite par tout où ſera x mettre $y - 3$, aprés quoy l'équation $xx = xd + bb$ ſera transformée en celle-cy $yy - 6y + 9 = yd - 3d + bb$ qui eſt la même.

Par ces transformations on reduit une equation en luy ajoûtant, ou retranchant de certaines grandeurs, à des formes plus ſimples, en faiſant evanoüir les grandeurs embarraſſantes. Car on peut faire que deux termes d'une queſtion dont on connoit la difference, ayent des ſignes contraires, & que par conſequent une partie de ce qu'elles produiſent s'évanoüiſſe, ou ne paroiſſe point; comme il arrive lors que deux grandeurs qui ont des ſignes contraires ſe multiplient. Soient par exemple ces deux lignes AE & EC dont la difference eſt DE, ainſi AD = EC; ſoit B le milieu de cette differenee, il eſt evident que AB ou BC + BE = AE & qu'au contraire BC ou AB − BE = EC. Ainſi ſi DE difference de AE & de EC eſt m, que la petite partie EC ſoit x, ſuppoſant AB = y donc $y + \frac{1}{2}m$ = AE & $y - \frac{1}{2}m = x$ ou EC, ainſi ces deux grandeurs AE & EC ſont reduites à ces deux termes $y + \frac{1}{2}m$ & $y - \frac{1}{2}m$ qui ont des ſignes contraires.



Si j'avois donc cette equation $xx+xd=bb$ en ſupoſant $y-\frac{1}{2}d=x$ & $y+\frac{1}{2}d=x+d$ ie trãsformeray l'equation precedente en celle-cy $yy-\frac{1}{4}dd=bb$, ou $yy=bb+\frac{1}{4}dd$, laquelle formule eſt bien plus aiſée à reſoudre ; car la racine inconnüe ne ſe trouve que dans un des membres ; ainſi ajoûtant $\frac{1}{4}dd$ qui eſt tout connu avec bb auſſi connu, on a une ſomme préciſement égale au quarré de y, ainſi y ſera connu. Cette equation $yy=bb+\frac{1}{4}dd$ ſe peut reſoudre avec le compas, & la regle comme le Problême 2e du chapitre precedent. Je prens AB$=d$ & CB ou CA$=\frac{1}{2}d$, ſur B j'éleve une perpendiculaire BD$=b$: de C comme centre & de l'intervalle CD je décris un cercle ; je dis que EC ou CF$=y$, que EB$=y+\frac{1}{2}d$ & BE$=y-\frac{1}{2}d$, que $\therefore y+\frac{1}{2}d, b, y-\frac{1}{2}d$, qu'ainſi $yy-\frac{1}{4}dd=bb$ & par conſequent $yy=bb+\frac{1}{4}dd$. Ce qui eſt evident, car le triangle BCD eſt droit, partant le quarré de y eſt égal aux quarrez de b & de $\frac{1}{2}d$. Or quand on connoit y ou EC, on connoit EA dont la difference avec EC eſt la $\frac{1}{2}d$ ou AC ou CB.



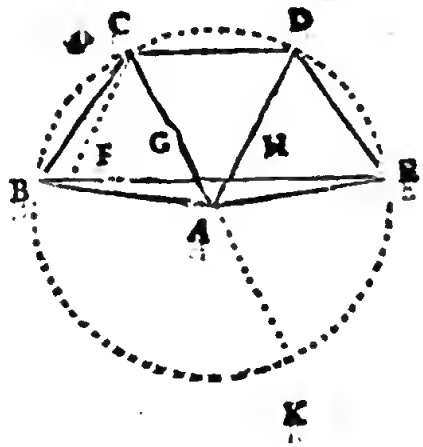
CHAPITRE XI.

On ne peut reſoudre avec le compas & la regle, les problêmes ſolides.

LEs équations ſolides, ou de trois dimenſions, ſe reduiſent dans une progreſſion de quatre termes ; mais outre que cela ne ſe peut expliquer en peu de paroles, pour connoître ce que l'on cherche dans une ſemblable progreſſion, il faut trouver deux moyennes proportionnelles entre deux termes, ce que l'on ne peut faire que mecaniquement, avec les lignes droites & les cercles ainſi qu'on l'a vû *l.* 3. §. 1. Ce qui peut arriver dans les problêmes qui ne regardent que les lignes droites & les cercles, comme dans ce problême ſi fameux de la triſection de l'angle qu'on ne peut reſoudre que par l'anyliſe, où l'on vient à une équation de trois dimenſions, ce qui montre que ce problême eſt ſolide.

La corde BE de l'arc BCDE eſt connuë. On propoſe de couper cet arc en trois parties égales, ſelon les premieres regles de la Methode, je ſuppoſe la cho-

ſe faite, c'eſt à dire, que BC = CD = DE. Je mene CF paralelle à DH : ainſi CF = DH ; & partant puiſque CG = DH ; CF = CG, ainſi FCG eſt un iſoſcele. Les angles BCG, & BGC ſont égaux, car la meſure de BCG eſt la moitié de l'arc BK, & celle de BGC eſt la moitié de KE, plus la moitié de BC ou de DE égal à BC : or BK eſt égal à KD ; donc ces deux angles qui ont même meſure ſont égaux ; partant le triangle CBG eſt iſoſcele. Il a un angle commun avec FCG ; ces deux iſoſceles ſont donc ſemblables. BAC eſt auſſi iſoſcele, & il a un angle commun avec CBG, ſçavoir BCG ; ces trois triangles ſont donc ſemblables.

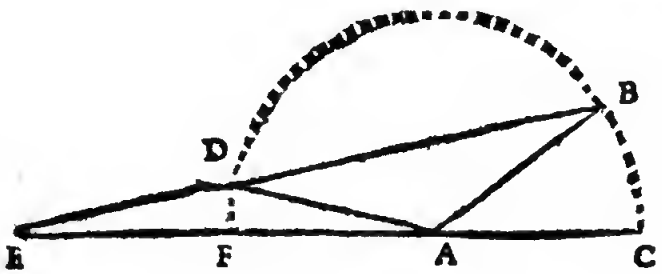


Ces trois triangles BAC, CBG, FCG étant ſemblables, il faut que ∴ AB, BC, CG, GF, donc ſi, AB = 1 & BC = z, ſelon ce qui a été dit cy-deſſus chap. 7. reg. 8. ∴ AB, BC, GC, GF, ou ∴ 1, z, zz, zzz.

Je nomme *b* la ligne connue BE ; par conſequent puiſque CD = FH, & partant HE = DE ; il ne s'en faut que la valeur de FG que BE, ou *b* ne ſoit triple de BC. Or FG = zzz, donc $b - zzz = 3z$, ou $zzz = 3z - b$.

Voilà juſques où nous pouvons pouſſer icy ce problême ; mais vous voyez qu'il n'y a point de Theorême dans les Elemens precedens, dont on puiſſe tirer un moyen pour connoître la grandeur inconnuë z, ſçachant ſeulement que ſon cube zzz eſt égal à 3 fois elle même, c'eſt à dire, à 3 z, aprês en avoir retranché la grandeur connuë *b*. Or cela ſe peut par le moyen d'une certaine ligne courbe; ainſi de tous les problêmes ſolides, dans leſquels en ſuivant l'ordre analytique, on arrive à des equations de pluſieurs dimenſions.

Ces problêmes ſolides ſe reſolvent facilement par des voyes mecaniques, cõme celuy-cy de la triſection de l'angle; Soit l'arc BC, meſure de l'angle B A C



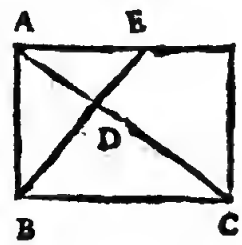
qu'il faut couper en trois. Je prolonge vers E le diametre CF,& appliquant une regle ſur B, & ſur le prolongement de CF je cherche le point D dans le cercle tel que AD ſoit égal à DE,ce que je trouve en tâtonnant, comme on dit. L'arc DF ſera le tiers de BC, & ainſi DAF le

tiers de BAC, ce que je démontre.

A D E & D A B ſont iſoſceles ; donc DBA = BDA & DAE = D E A : l'angle B D A exterieur eſt égal aux deux interieurs DEA & DAE, donc DBA eſt égal à ces deux mêmes angles, & par conſequent il eſt double de l'un & de l'autre. L'angle BAC exterieur eſt auſſi êgal aux deux interieurs DEA (ou ſon égal DAF) & à DBA, partant il eſt triple de DAE moitié de DBA.

Pour reſoudre geometriquement les Problêmes ſolides, il faut trouver deux moyennes proportionnelles entre deux grandeurs données, comme on le fera voir en ſon lieu.

Il eſt facile de trouver en general avec le compas & la regle, quatre lignes proportionnelles, car ſi on mene une perpendiculaire ſur la diagonale d'un rectange, les quatre portions de la diagonale & de cette ligne ſeront proportionnelles, car *car par le Th. 7e* §1 *l.* 3 ∴ CD, BD, AD & *par le même Th.* ∴ BD, AD, DE, ainſi ∴ CD, BD, AD, DE, mais il n'eſt pas queſtion de cela; il s'agit, deux lignes étant données, de trouver entr'elles deux moyennes proportionnelles; ce que je ne puis trouver par cette voye.



CHAPITRE XII.

Eſſais de la methode ſur quelques problêmes.

ON peut tenter la reſolution d'un problême par deux voyes. La premiere n'eſt qu'une aplication des Elemens qui font découvrir quelque moyen particulier au problême dont il s'agit, & qui ne peut pas ſervir dans un autre. La ſeconde voye eſt l'ordre que preſcrit la methode, par lequel on trouve ce que l'on cherche d'une maniere d'autant plus excellente, qu'elle s'étend generalement à tout problême. Donnons un exemple de ces deux voyes.

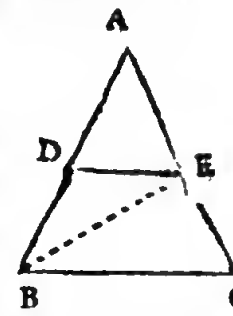
Problême.

BAC eſt un iſoſcele, on propoſe de couper ſes côtés AB, AC, par une parallele à la baſe BC ; de ſorte que cette parallele ſoit égale à ce qui reſte des côtés, c'eſt à dire (je ſupoſe la choſe faite) que DB=DE.

Premiere maniere.

Je ſupoſe la choſe faite, que BD=DE,

donc le triangle BDE eſt iſoſcelle, ainſi les angles DBE, & DEB ſont égaux : Or les angles CBE & BED ſont auſſi égaux *par le Theor. 8. liv. 2. §. 1.* partant EBC, & EBD ſont égaux ; partant la ligne BE coupe par la moitié l'angle DBC. D'où je connois que dans un triangle iſoſcelle, tel que BAC, en diviſant en deux l'angle ABC par une ligne droite BE, menant par E une parallele à BC, elle ſera égale à DB; ainſi par cette proprieté du triangle iſoſcelle, je trouve ce moyen de reſoudre le problême propoſé; mais comme vous voyés, ce moyen eſt particulier & propre à ce ſeul problême.



Seconde maniere.

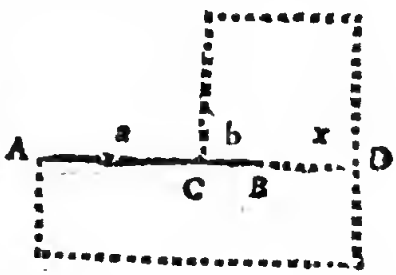
Supoſant la choſe faite, je nomme AB qui eſt connu *a*, & *d*, la baſe BC, auſſi connuë, & *x*, la grandeur inconnuë AE que l'on cherche ; ainſi comme EC$=$ *a* $-$ *x*, auſſi DE$=$ *a* $-$ *x*, il eſt evident que *a*, *d* :: *x*, *a* $-$ *x*, donc *aa* $-$ *ax* $=$ *dx*. J'ajoûte de part & d'autre *ax*, & il vient *aa* $=$ *dx* $+$ *ax*; je ſupoſe *c* $=$ *d* $+$ *a*, ainſi *cx* $=$ *dx* $+$ *ax*, & par conſequent au lieu de *dx* $+$ *ax*, mettant *cx*, j'ay *aa* $=$ *cx* ; diviſant donc cette equation par *c*, j'ay $\frac{aa}{c} = x$; par conſequent $\div$ *c*, *a*, *x*, ainſi il ne s'agit que de

trouver une troiſiéme proportionnelle à deux lignes connües, qui ſont les deux premiers termes d'une progreſſion. La ligne AB jointe avec la ligne BC eſt le premier terme & AB le ſecond. Cette ſeconde maniere analitique eſt generale & n'eſt point particuliere à ce problême.

Problême

La ligne AB eſt coupée dans un de ſes points, comme C, on propoſe de la prolonger juſques à D; de ſorte que le rectangle fait de AD,& de BD, ſoit égal au quarré de CD.

Je ſupoſe la choſe faite. Il eſt evident que la queſtion ſe termine à trouver la valeur de BD, ou de x; je multiplie AD ou $a+b+x$ par DB, c'eſt à dire, par x ce qui fait $ax+bx+xx$, lequel produit, ſelon la queſtion eſt égal au produit de CD ou de $b+x$ multiplié par luy même; c'eſt à dire, que $ax+bx+xx=bb+2bx+xx$; j'ôte des deux membres de cette equation $bx+xx$ & il reſte $ax=bb+bx$, je fais paſſer bx de l'autre côté, afin que la grandeur connuë bb reſte toute ſeule, & j'ay $ax-bx=bb$; pour reduire cette equation aux plus ſimples termes, je la diviſe par $a-b$



& alors $x = \frac{bb}{a-b}$ laquelle equation ſe reſout dans cette progreſſion $\div a-b, b, x$ dont les deux premiers termes étant connus, le troiſiéme que je cherchois, qui eſt x me ſera auſſi connu, ainſi pour faire le Probléme il faut prolonger la ligne AB de la grandeur de x qu'on vient de connoître.

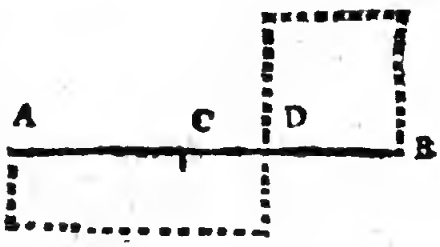
Scholie.

La reſolution de chaque probléme, donne la connoiſſance d'un nouveau Theorême : Car ſelon ce qui vient d'être trouvé, ſi le quarré de BD, prolongement d'une ligne, plus CB partie de cette ligne, eſt égal au rectangle fait de AD, & de BD : Ce prolongement ſera le troiſiéme terme d'une progreſſion ; dont AC—BC eſt le premier terme, & BC le ſecond. La plus grande partie des Theorémes ſont les fruits de l'analyſe, qui comme vous voyés, eſt une ſource feconde de verités

Problème.

La ligne AB eſt coupée en C. on propoſe de la couper de rechef en D, de ſorte que le rectangle de AC+CD par CD ſoit égal au quarré de DB.

Je ſuppoſe la choſe faite. Il faut trouver la valeur de CD : ſoit AC $= a$ & CB $= b$ & CD $= x$; ainſi DB $= b - x$. Le rectangle de AD par CD eſt $ax - xx$, & le quarré de DB

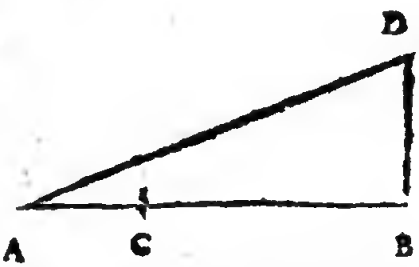


eſt $bb - 2bx + xx$, donc ſelon la queſtion $ax + xx = bb - 2bx + xx$. Je retranche xx de part & d'autre; & $ax = bb - 2bx$. Je faits paſſer $2bx$ de l'autre côté, afin que le connu ſoit ſeul, $ax + 2bx = bb$, je diviſe cette equation par $a + 2b$ il vient $x = \frac{bb}{a+2b}$ reduiſant cette égalité en proportion $\div a + 2b, b, x$; les deux premiers termes ſont connus, donc x le ſera auſſi, ainſi en prenant ſur CB la ligne CD égale à x, on aura fait ce qui eſtoit requis.

Probléme.

La ligne droite AB eſt coupée en C, la ligne BD infinie eſt perpendiculaire ſur AB : il faut de A mener AD une ligne ſur BD, de ſorte que $AD = BC + BD$.

Je ſuppoſe la choſe faite, & que $AB = a$, & $BC = b$ & $BD = x$, valeur de BD que l'on cherche. Selon la queſtion $AD = BC + BD$, partant $AD = b + x$. Or puiſque l'angle A B D eſt droit, le quarré de AD, ou de $b + x$, lequel quarré eſt $bb + 2bx + xx$ eſt égal à ceux de AB, & de DB qui ſont aa & xx. Ainſi $bb + 2bx + xx = aa + xx$, ôtant de

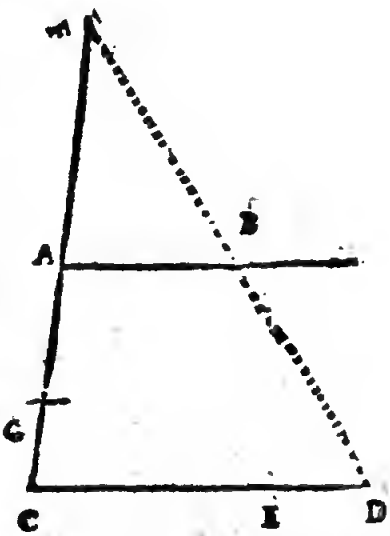


part & d'autre xx, il vient $bb+2bx=aa$. Afin que le connu ſoit tout d'un côté, faiſans changer de place à bb, nous aurons $2bx=aa-bb$ que je diviſe par $2b$, & j'ay $x=\frac{aa-bb}{2b}$ laquelle equation ſe reduit ainſi dans cette proportion $2b, a+b :: a-b, x$ dont les trois premiers termes étant connus, le 4e x ſera connu, ce que l'on cherchoit.

Problême.

Deux lignes paralleles AB, CD, ſont données par poſition avec CF, comme auſſi les points F & E. on propoſe de mener FD coupant AB & CD prolongée au beſoin; de ſorte que AB ſoit à ED comme AF eſt à AG.

Soit $AF=a$, $CF=b$, $CE=c$, $AG=d$, & $AB=x$.

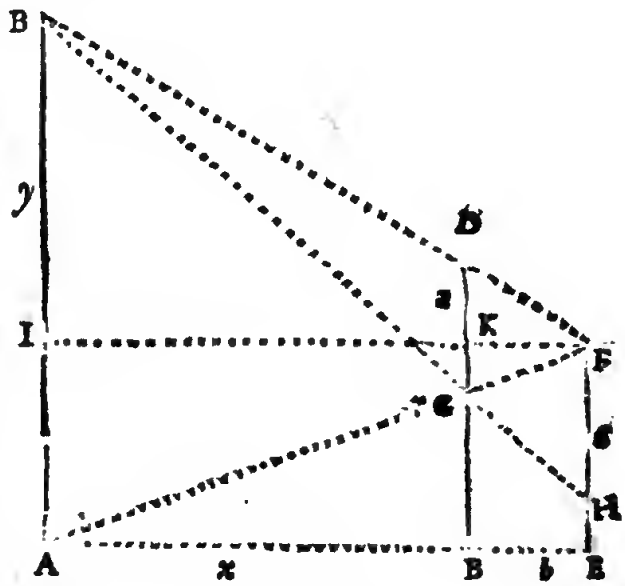


Nous ſuppoſons la choſe faite : partant ſelon l'hipotheſe $a, d :: x$, ED. multipliant donc x par d & diviſant le produit qui eſt dx par a, le quotient $\frac{dx}{a}=ED$. Les deux triangles AFB & FCD ſont ſemblables, donc $a, x :: b$, CD. or $CD=CE+ED$, & par-

tant CD$=c+\frac{dx}{a}$ Le produit des extrêmes a & $c+\frac{dx}{a}$ qui eſt $ac+dx$ eſt égal à celuy des moyens. Donc $ac+dx=bx$. Je tranſporte $+dx$ & vient $ac=bx-dx$. Je diviſe cette equation par $b-d$ & j'ay $x=\frac{ac}{b-d}$ laquelle equation ſe reduit en cette proportion $b-d, c :: a, x$ dont les trois premiers termes ſont connus.

Problême.

Meſurer la hauteur inacceſſible AB & & ſa diſtance AC par le moyen de deux bâtons CD & EF.



Je ſuppoſe que AC $=x$, AB $=y$ CE $=b$, GD $=a$ & FH $=c$, alors puiſque les triangles BAF & GDF ſont ſemblables, AB, GD :: FA, FG, mais FA, FG :: FI, FK, à cauſe des paralelles CD, BA, donc AB, GD :: FI, FK, ou leurs égales AE, CE, ainſi $y, a :: x+b, b$, par conſequent $by=ax+ab$.

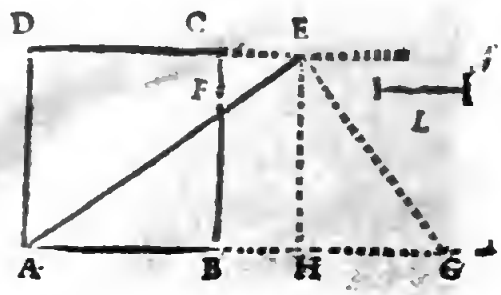
Les deux triangles BHF, & BGD ſont ſemblables ; donc comme B D à B F, ou IK à IF, ou AC à AE, de même GD à HF, ainſi AC,AE : : G D, FH, ou x, $x+b$ :: a, c, partant $xc = xx+ab$ ôtant ax de part & d'autre il reſte $xc-ax = ab$, diviſant l'un & l'autre membre par $c-a$ on a $x = \frac{ab}{c-a}$ ainſi $c-a$, a :: b, x, mais on connoît les trois premiers termes ; donc x le quatriéme que l'on cherche ſera auſſi connu.

Puiſque l'on a trouvé cy-deſſus que $by = ax+ab$ & $xc = ax+ab$, il s'enſuit que $by = cx$, êtans égaux à la même grandeur $ax+ab$ partant b, c :: x, y. Or x eſt déja connu, donc les trois premiers termes eſtant connus, on connoîtra le quatriéme terme y que l'on cherchoit.

Problême.

Un quarré AC étant donné, il faut mener de A l'un de ſes angles la ligne droite AE, de ſorte que la partie EF compriſe entre le côté DC prolongé en E & entre le côté BC, ſoit égale à une ligne droite donnée L.

Je ſupoſe la choſe faite, & je marque les lignes connues par les premieres lettres à l'ordinaire, ſçavoir AB, ou



BC, ou CD, ou AD, avec a & EF avec b. Je ne connois point d'autres lignes. Entre les lignes inconnuës je choiſis CF, & AF, avec leſquelles je crois venir plus aiſément à une equation, & je fais AF $=x$ & CF $=z$.

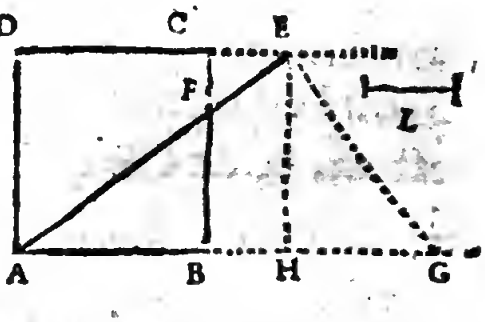
Je cherche des equations par la voye des proportions. Les triangles ABF, ECF, EDA, ſont rectangles & ſemblables, partant $x, a :: b$, CE, donc CE $= \frac{ab}{x}$ & par la même raiſon $b, z :: b+x, a$, ou AD. Donc $ba = zb+zx$.

Je cherche une ſeconde equation par une autre voye, je ſçay que le quarré de EF, ou bb eſt égal aux deux quarrés de CF, qui eſt zz, & de CE qui eſt $\frac{aabb}{xx}$ puiſque CE $= \frac{ab}{x}$. Donc $bb = zz + \frac{aabb}{xx}$

Il faut faire en ſorte qu'il n'y ait qu'une grandeur inconnuë. Pour cela je diviſe la premiere equation $ba = zb+zx$ par $b+x$ il vient $z = \frac{ba}{b+x}$ dont le quarré ſera $\frac{bbaa}{bb+2bx+xx} = zz$. Mettant donc dans la ſeconde equation à la place de zz ſa valeur que nous avions trouvée, ſçavoir $bb = zz + \frac{aabb}{xx}$ il viendra $bb = \frac{aa\,bb}{bb+2b+xx} + \frac{aabb}{xx}$ laquelle equation aprés les reductions neceſſaires ſe reduit à une equa-

tion de quatre dimenſions.

Or en tirant quelques autres lignes dont il n'eſt point parlé dans la queſtion, on peut trouver une autre equation plus ſimple. Soit mené ſur A E, la perpendiculaire E G &, de E ſur AG, la perpendiculaire EH. Les triangles A B F, AEG, EHG ſont rectangles, ils ont un angle commun, ils ſont donc ſemblables. Or EH= AB, donc FAB & HEG ſont égaux; ainſi EG= AF, & partant EG= x. Je ſuppoſe BG= y; ainſi AG= $a+y$ le quarré de $a+y$ qui $aa+2ay+yy$ eſt égal à celuy de EG ou de x qui eſt xx à celuy de AE ou $x+b$ qui eſt $xx+2xb+bb$, ainſi on a cette equation $aa+2ay+yy= xx$ $xx+2xb+bb$. Et parce que AB, AF :: AE, AG, on a, x, :: $x+b$, $a+y$, par conſequent $aa+ay= xx+bx$, ainſi en la place de $2xx+2xb$, mettant ſa valeur $2aa+2ay$ dans l'equation precedente, il n'y aura plus qu'une lettre inconnuë, $aa+2ay+yy= 2aa+2ay+bb$; ôtant de part & d'autre $aa+2ay$, il reſte $yy= aa+bb$, qui eſt une equation tres ſimple.



Problême.

Deux Marchands ont mis en ſocieté 12.

liv. & ont gagné 34 liv. le premier a pris 7 liv. tant pour miſe que pour gain pour deux mois; le ſecond a pris 39. liv. tant pour ſa miſe que pour ſon gain pour cinq mois. On demande la miſe & le gain d'un chacun en particulier.

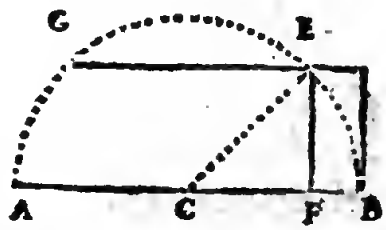
La miſe des deux $12 = a$. La miſe du premier ſoit x; ainſi celle du ſecond eſt $a - x$.

La miſe & gain du premier eſt $7 = b$; donc $b - x$ ſera le gain du premier.

La miſe & gain du ſecond eſt $39 = c$; donc $c - a + x$ ſera le gain du ſecond.

Or comme la miſe du premier multipliée par ſon temps eſt à ſon gain; ainſi la miſe du ſecond multipliée par ſon temps eſt à ſon gain; c'eſt à dire, $2x, b - x :: 5a - 5x, c - a + x$. Le produit des extrêmes eſt égal à celuy de ceux du milieu; donc $2xc - 2ax + 2xx = 5ab - 5ax - 5bx + 5xx$; & ajoûtant de part & d'autre $2ax$ & retranchant en même temps $2xx$, on aura $2xc = 5ab - 3ax - 5bx + 3xx$; j'ajoûte de part & d'autre $3ax + 5bx$, ce qui me donne $2cx + 3ax + 5bx = 5ab + 3xx$. Je ſuppoſe que $d = 2c + 3a + 5b$; ainſi $dx = 5ab + 3xx$; je prend auſſi $f = 5ab$, que je retranche de part & d'autre, & j'ay $dx - f = 3xx$, en ſuite pour reduire cette equation dans une formule qui me donne la reſolution de la queſtion, je ſuppoſe

$d = 3g$ & $f = 3b$; ainſi $gx - b = xx$, je trouve un quarré égal à b, que je nomme ll, partant $gx - ll = xx$; ainſi par le problême 3e du chap. 8e ou 3e exemple du chap. 9e cette equation ſe reduit à cette progreſſion $\div g - x, l, x$, car $gx - xx = ll$, & par conſequent $gx = ll + xx$, & $gx - ll = xx$; les extrêmes de cette progreſſion ſont $g - x$ & x, dont g eſt la ſomme. On trouvera leur difference ſi ſur $AB = g$ ayant décrit le cercle AGB on éleve perpendiculairement $BD = l$, & l'on tire de DG parallele à AB, & du point E la perpendiculaire EF qui coupera AB aux points cherchés : ce qui eſt expliqué, *Probl. 1. chap. 9.* La grandeur inconnüe que l'on cherchoit eſt x. Or comme dans ce Problême on cherche la valeur de x en nombre, il faut du quarré de CE ou CB, moitié de AB, ſomme des extrêmes connuës, ôter le quarré de $FE = ll$ auſſi connuë, il reſtera le quarré de CF, moitié de la difference des extrêmes, dont la racine ajoûtée à CB donnera le plus grand, & étant ôtée le plus petit $x = 3$ miſe du premier. Aprés quoy tout le reſte eſt facile.



CHAPITRE XIII.

Il y a des bornes dans la Geometrie, au delà deſquelles l'on ne peut aller. L'on n'a encore pû connoître le rapport du cercle avec la ligne droite, on démontre ce qui en eſt connu.

ON peut juger à preſent de l'étenduë de la Geometrie, dont nous n'avons donné que les premiers Elemens, nous étant bornés aux lignes droites & circulaires, qui ſont les plus ſimples & les plus faciles à connoître. Ce n'eſt pas icy le lieu de faire des reflexions morales. Nous avons inſinué dans la Preface combien il faut qu'il y ait de choſes en Dieu, puis que la matiere eſt ſi feconde, & que l'eſprit y découvre tant d'admirables proprietés, apprenant en même temps qu'il y a des choſes qui luy ſont incomprehenſibles. Le cercle, quoyque ſi ſimple, l'arrête. Cette figure ſe fait de maniere qu'il n'y peut y avoir de difference entre ſes parties; elle n'a ny commencement ny fin, ce qui fait qu'on a dit pluſieurs fois que le cercle eſt une image de la ſimplicité, & en

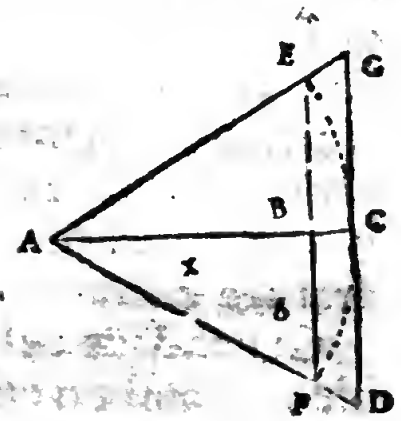
même temps de la fecondité Divine, puis qu'il n'y a point de figure qui n'y puiſſe étre r'enfermée, & qu'il eſt imcomprehenſible. Quelques efforts qu'ayent fait les Geometres, ils n'ont pû, un cercle étant donné, aſſigner une ligne droite, égale à la circonference. Ce qui vient de ce qu'on ne peut concevoir dans un cercle aucune partie pour petite qu'elle ſoit, qui luy ſoit cõmune avec une ligne droite; car ſi cette partie eſt une ligne droite, les points dont elle eſt compoſée ne ſeront pas éloignez également du centre du cercle, ainſi elle n'eſt pas partie d'un cercle.

Les moyens les plus exacts pour connoître le cercle, ſont les polygones qui luy ſont inſcrits & circonſcrits, car comme plus un polygone à de côtés, plus il approche du cercle, ainſi qu'il a été demontré, en prenant deux polygones z & x d'un nombre de côtés fort grand, dont l'un ſoit circonſcrit, & l'autre inſcrit, ſi on pouvoit connoître la raiſon que x inſcrit à avec le diametre du cercle, on connoîtroit une raiſon plus petite, mais de peu, que celle que le cercle a avec le diametre, & voyant celle que circonſcrit z a avec le diametre du même cercle, on connoîtroit une raiſon plus grande, mais de peu de choſe, que celle du même cercle avec le diametre

ainſi on connoîtroit de fort prés la raiſon du cercle avec le diametre.

Cela ſe peut ſans doute à peu prés, mais ce n'eſt pas une connoiſſance exacte: il n'eſt pas même poſſible de connoître le rapport de tous lespolygones avec le diametre du cercle où ils ſont inſcrits, ou auquel ils ſont conſcrits, quant ils ont pluſieurs côtés, puiſque leurs raiſons ſont ſourdes. La raiſon des côtês du triangle, du quarré inſcrits dans un cercle avec le diametre du cercle eſt ſourde; celle de l'exagone inſcrit ne l'eſt pas, puis que chaque côtê eſt un des rayons du cercle, & par conſequent la moitié du diametre, mais la raiſon d'un exagone inſcrit à un exagone circonſcrit l'eſt.

Soit DE côtê d'un exagone inſcrit egal à $2b$, ainſi DB $= b$, ſoit AB nommé x, le quarré de AB ou de x, plus celuy de DB étant egaux à celuy de AD le rayon du cercle, $xx + bb = 4bb$ ôtant bb de part & d'autre $xx = 3bb$, donc puiſque 3 n'eſt pas un nombre quarré, la valeur de x ne ſe peut exprimer par nombre. Or AB ou x, BD :: AC, CF, la raiſon de x à BD eſt ſourde; celle de AC à CF ſera donc



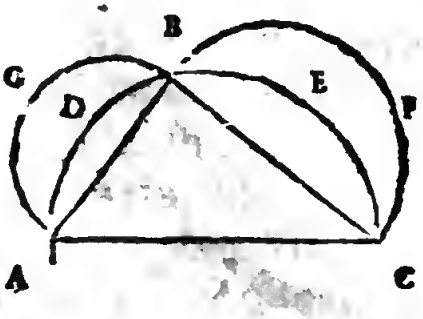
ſourde. Ainſi DE & FG ſeront incommenſurables. Ce qu'il falloit prouver.

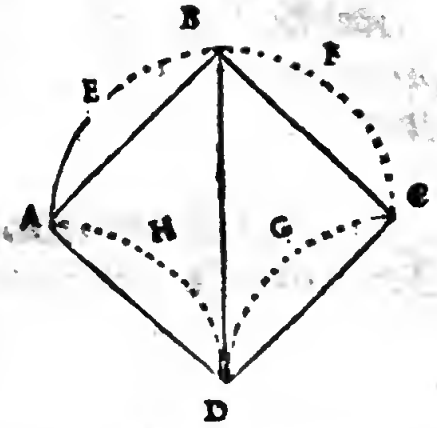
La raiſon du côté du Pentagone avec le diametre du cercle où il ſe trouve eſt auſſi ſourde en elle même, comme il a eſté demontré. Celle du decagone l'eſt en elle même & en puiſſance, de ſorte que nous avons droit de juger que c'eſt chercher ce qui ne ſe peut trouver, que la raiſon exacte du cercle a ſon diametre.

Si on pouvoit connoître la raiſon du diametre à la circonference, il ne ſeroit pas difficile de trouver un quarré égal à la ſurface, ce qui s'appelle la quadrature du cercle ; car on a fort bien demontré que la ſurface d'un cercle eſt égale à un triangle rectangle, qui a pour hauteur le rayon de ce cercle, & pour baſe une ligne droite, égale à ſa circonference : il eſt facile de trouver un quarré preciſément égal à un triangle donné. Mais comme on ne peut point trouver de lignes droites, qu'on puiſſe prouver être égales à la circonference d'un cercle, l'on en doit regarder la quadrature comme une choſe inconnuë.

Cependant cela ne paroît pas impoſſible, quand on conſidere qu'on peut aſſigner un eſpace compris entre des lignes circulaires, qui ſoit égal à un eſpace compris entre des lignes droites. Car le

triangle ABC étant rectangle, le demy cercle ADBE eſt égal aux deux demy cercles AGB & BFC : ôtant donc les parties communes, ſçavoir ADB & BEC, il reſtera AGBDA, & CEBFC, comme deux lunes ou croiſſans qui ſeront égales au reſte du demy cercle ADBEC, lequel reſte eſt le triangle ABC.





On voit auſſi à l'œil que la figure AEBFCGDH ſemblable au couteau tranchant d'un Cordonier eſt égale au quarré ABCD, car par la conſtruction les parties AHD= AEB= BFC= CGD ſont égales; ainſi on ne voit pas qu'il ſoit impoſſible d'aſſigner une figure rectiligne égale à la ſurface d'un cercle.

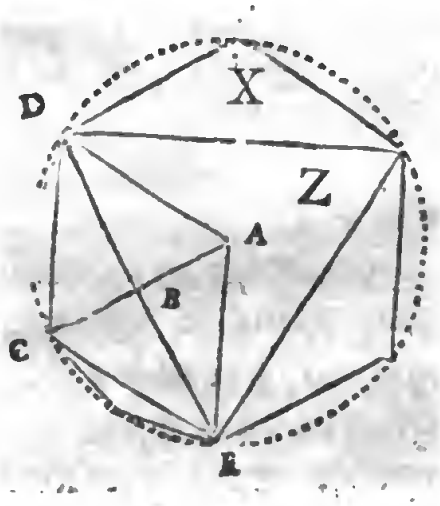
Mais quand on veut chercher cette figure, on trouve des obſtacles. La voye qui eſt connuë comme nous l'avons dit, c'eſt de comparer la ſurface d'un polygone inſcrit avec celle d'un circonſcrit, car il eſt evident qu'ayant ſuppoſé ces polygones d'une infinité de côtés;

qu'elle ſoit le côté d'un triangle equilateral inſcrit dans un cercle, aprés ayant fait l'exagone & coupé les côtez de l'exagone par des perpendiculaires, vous trouverez que les perpendiculaires couperõt BE en trois parties BC, CD, DE.

Mais quand on avance, on trouve des barrieres. Les raiſons qu'on découvre ſont ſourdes. Voila un Theorême general qui donne une connoiſſance fort étenduë de ce qu'on peut ſçavoir de cette matiere. On appelle *Apotême* la partie du rayon qui eſt entre le côté d'un polygone inſcrit, & le centre du cercle.

Quand de deux polygones inſcrits l'un a deux fois plus de côtez que l'autre, le plus grand eſt au plus petit comme le rayon du cercle eſt à l'apotême du plus petit.

Z eſt un polygone dont l'apotême eſt AB, & X un polygone qui a deux fois plus de côtez. La ſurface de Z eſt égale à autant de fois le triangle DAE que Z a de côtez, & il eſt clair qu'ajoûtant à chacun de ces triangles, le triangle DCE on aura la ſurface de X qui eſt à celle de Z,



comme le romboïde AECD eſt au triangle DAE : or ces deux figures ſont l'une à l'autre comme le rayon AC eſt à AB, qui eſt l'apotême de Z, car les ſurfaces des deux triangles DAE & DCE, qui ont même baſe, ſont comme leur hauteur AB & BC, ainſi de tous autres polygones dont l'un aura deux fois plus de côtez que l'autre.

Si on diviſe le polygone X pour en faire un qui ait deux fois plus de côtez, que je nomme Y ; il en ſera de même, & il eſt bon de remarquer que Z le premier polygone ſera à ce troiſiéme Y comme le plan de l'apotême du premier & du ſecond eſt au quarré du diametre, ce que je démontre ainſi; ſoit l'apotême du premier nommé m, celuy du ſecond n, & le rayon k, ſelon ce qui a été démontré.

$$\begin{cases} Z, X :: m, k, \\ X, Y, :: n, k. \end{cases}$$

Et en multipliant les antecedans par les antecedans, & les conſequans par les conſequans.

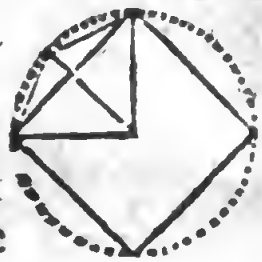
$$ZX, XY :: mn, kk.$$

Or ZX, XY :: Z, Y, donc Z, Y :: mn kk le premier polygone Z ſera au troiſiéme polygone Y comme mn plan de l'apotême du premier & du ſecond eſt à kk quarré du rayon,

Par cette methode on démontre que

le premier Polygone eſt au quatriéme comme la ſolide fait de l'apotême du premier, du ſecond & du troiſiéme eſt au cube du rayon du cercle, ainſi de ſuite à l'infini.

L'apotême d'un qu'arré inſcrit eſt la moitié d'un des côtez, ainſi un quarré eſt à un octogone comme la moitié d'un de ſes côtez eſt au rayon du cercle où il eſt inſcrit ; ou ce qui eſt la même choſe comme un de ſes côtez eſt au diametre du cercle. C'eſt pourquoy on a droit de conclure qu'un quarré dans un cercle eſt à un polygone qu'on a fait d'une infinité de côtez en doublant toujours les côtez, c'eſt à dire, d'un quarré faiſant un octogone, d'un octogone un polygone de ſeze côtez, ainſi de ſuite, lequel polygone peut être conſideré comme un cercle. On peut, dis-je, conclurre que le quarré eſt au cercle comme une grandeur faite de la multiplication de tous les apotêmes de ces polygones, à la plus haute puiſſance du rayon du cercle: mais ce n'eſt preſque rien ſçavoir; car outre qu'on rencontre des raiſons ſourdes ; le rayon & le diametre ſont diviſibles à l'infini, ainſi on ne peut point comprendre le nombre de tous ces apotêmes. Il eſt donc impoſſible



d'arriver par cette voye enfin à un polygone égal à un cercle. Cette figure eſt ainſi incomprehenſible, quoy qu'elle ſoit la plus ſimple de toutes les figures de Geometrie.

Neanmoins, quoy que l'on ne puiſſe pas trouver preciſement la raiſon de la circonference d'un cercle avec le diametre, on le peut à peu pres. La raiſon du circuit de l'exagone, au diametre du cercle où il eſt inſcrit, eſt comme 3 à 1, chaque côté étant égal au rayon du cercle, & par conſequent puiſque le circuit eſt plus petit que la circonference du cercle, il faut que la raiſon du diametre du cercle à la circonference ſoit plus petite que celle de 1 à 3, ou de 7 à 22.

Archimede trouve auſſi qu'elle eſt plus grande que celle de 7 à 22. Pour cela il conſidere un poligone de 96 côtés, dont le circuit eſt au diametre du cercle où il eſt inſcrit, comme 223 à 71, laquelle raiſon eſt moindre que celle de la circonference au diametre, puiſque ce poligone inſcrit eſt plus petit que le cercle.

Le même Archimede a trouvé que la raiſon du circuit d'un poligone de 96 côtés circonſcrits avec le diametre étoit comme 22 à 7. laquelle eſt plus grande que celle de la circonference du cercle avec le diametre, puiſque ce polygone

circonſcrit eſt plus grand que le cercle. On à donc deux raiſons, dont l'une eſt plus petite, & l'autre plus grande, que la veritable qu'on cherche. Donnons par le Cor. 2. prop. 3 l. 5 Gr. un même conſequent à ces deux raiſons, ſçavoir 223. à 71 & 22. à 7. on les reduit à celles-cy.

1561. } 497.
1562. }

Ayant ainſi ſuppoſé le diametre de 497 parties, la circonference du cercle ſera plus grande que 1561, & plus petite que celle de 1562. Diviſons l'unité qui eſt la difference de ces deux nombres par 497. le quotient $\frac{1}{497}$ fera voir que la difference dont l'un & l'autre nombre differe de la veritable grandeur de la circonference, eſt moindre que la $\frac{1}{497}$ partie du diametre; ce qui eſt peu de choſe. Ceux qui ont pris des polygones plus grands que de 96 côtés on trouvé une raiſon plus exacte. Metius la met comme de 355 à 113.

Ludolphe l'exprime par deux nombres, chacun de 21 chifres, ſelon ſon calcul, la circonference plus grande que la veritable ne differe d'avec celle qui eſt moindre que la veritable, que d'une ſeule unité; de ſorte que leur difference avec la veritable eſt moindre qu'une partie du diametre, diviſé en un nombre de parties exprimé par 21 chiffres; ce qui

au regard du diametre eſt moins qu'un grain de ſable au regard de toute la terre.

Suivant cette raiſon d'Archimede qu'on ſuit dans la pratique de 22 à 7, ou de 44 à 14, ou de 66 à 21, qui eſt la même, la ſurface du cercle eſt au quarré de ſon diametre, comme 11 à 14. ſoit nommé m, la circonference du cercle & n le diametre. Multipliant m & n par n, alors mn, $nn :: m$ n, & puiſque m, $n :: 44$, 14, donc mn, $nn :: 44$, 14, donc $\frac{mn}{4}$ $nn :: \frac{44}{4}$ (ou 11) 14. Or $\frac{mn}{4}$ par le corol. du Th. 10 l. 2. §. 4. eſt la ſurface du cercle, donc cette ſurface eſt à nn quarré du diametre comme 11 à 14.

On demontrera par la même methode que la ſolidité de la ſphere eſt au cube de ſon diametre, comme 11 à 21. Car mnn, $nnn :: m$, n. Or m, $n :: 66$. 21 & $\frac{mnn}{6}$ $nnn :: \frac{66}{6}$ (ou 11) 21. Mais par le Corol. 3 du Theor. 17 l. 4. §. 4. $\frac{mnn}{6}$ eſt la ſolidité de la ſphere, donc cette ſolidité eſt au cube du diametre comme 11 à 21.

A GRENOBLE,
De l'Imprimerie d'Antoine Fremon,
à l'entrée de l'Hôtel de Leſdiguieres.

EXTRAIT DV LIVRE DE LA GRANDEUR:

DE LA QVANTITE' RELATIVE DES GRANDEVRS.

LIVRE TROISIE'ME.

AVERTISSEMENT.

LA quantité d'une Grandeur eſt abſoluë, ou relative. La quantité abſoluë d'une Grandeur, eſt ce qu'elle eſt en elle-même : la quantité relative de cette Grandeur, eſt ce qu'elle eſt au regard d'une autre Grandeur avec laquelle on la compare, laquelle comparaiſon la fait appeller égale ou inégale, plus grande, ou plus petite : ce qui ſe concevra clairement dans un exemple. La quantité abſoluë de la grandeur *b* ſera le nombre des parties de *b*, qui eſt, ſi vous voulez, 100 pieds : ſi je compare *b* avec *c* qui a 100 pieds, & avec *d*, qui n'eſt que de 50 pieds, la quantité relative de *b* eſt

ce qu'elle eſt au regard de *c* & de *d*; elle eſt égale à *c*, elle eſt inégale avec *d*, elle eſt plus grande que *d*.

Or on ne peut comparer deux ou pluſieurs Grandeurs qu'en deux manieres, ou en conſiderant leur difference, c'eſt a dire, de combien de parties l'une eſt plus grande ou plus petite que l'autre ; ou bien en conſiderant comment l'une eſt contenuë ou contient les autres avec qui elle eſt comparée. Ces deux manieres de comparer ont leurs proprietez particulieres, ainſi il les faut diſtinguer: ce que ne font pas ceux qui en parlant de la quantité relative des Grandeurs, ſe contentent de dire que c'eſt une maniere d'être au regard des autres Grandeurs avec leſquelles elle eſt comparée, & en ſuite démontrent pluſieurs proprietez de cette maniere d'être, qui cependant ne peuvent convenir qu'à l'une des deux manieres de comparer des Grandeurs: c'eſt un defaut conſiderable que nous tâchetons d'éviter.

SECTION PREMIERE.

Definition & explication des termes.

Premiere Definition.

LOrs que l'on compare deux Grandeurs l'une avec l'autre, ces deux Grandeurs ſont nommées termes de cette comparaiſon. Le premier terme s'appelle anteecedent, & le ſecond conſequent.

Seconde Definition.

L'excez d'une Grandeur par deſſus une autre Grandeur, s'appelle difference ; l'excez de 7 par deſſus 5 eſt 2 : ce nombre 2 eſt la difference de 7 & de 5.

Troiſiéme Definition.

La maniere dont une Grandeur contient ou eſt contenuë dans celle avec laquelle on la compare, ſe nomme raiſon. La maniere que 2 eſt contenu dans 6, ou de 6 à 2. que 6 contient 2, s'appelle raiſon de 2 à 6.

Quatriéme Definition.

L'égalité des raiſons ou des differences, s'appelle proportion.

Cinquiéme Definition.

Proportion arithmetique, eſt une égalité de differences. La difference de 5 avec 3 eſt la même que celle de 10 avec 8, l'égalité de ces deux differences s'appelle proportion Arithmetique.

Sixiéme Definition.

L'égalité des raiſons ſe nomme Proportion Geometrique, ou ſimplement Proportion. Les deux raiſons de 2 à 4, & de 3 à 6

étant égales, ces nombres ſont en Proportion Geometrique.

Septiéme Definition.

Chaque difference & chaque raiſon ſuppoſant deux termes, la proportion qui dépend de l'égalité des differences & des raiſons, ſuppoſe par conſequent quatre termes, dont le premier eſt nommé premier antecedent; le ſecond, premier conſequent; le troiſiéme, ſecond antecedent; le quatriéme, ſecond conſequent. Ces Proportions ſe marquent de cette maniere.

Proport. Arithm. 5, 7 : 10, 12.

C'eſt à dire, qu'il y a méme difference entre 5 & 7 qu'entre 5 & 12. *Proportion Geometrique* 3, 6 :: 4, 8.

C'eſt à dire, que la raiſon de 3 à 6 eſt égale à celle de 4 à 8, que 3 eſt contenu deux fois en 6, comme 4 eſt contenu deux fois en 8.

Huitiéme Definition.

Le premier & le dernier terme d'une Proportion, s'appellent les extrêmes de cette Proportion, & le 2 & le 3 ceux du milieu, ou les moyens,

Neufiéme Definition.

Vn même terme peut ſervir de premier conſequent au premier antecedent, & de ſecond antecedent au ſecond conſequent, ainſi ces trois ſuffiſent pour faire une Proportion. Pour lors cette Proportion eſt dite continuë, & la Grandeur qui fait l'office de deux termes, eſt appellée moyenne proportionnelle.

Proport. Arithm. continuë, 5, 7, : : 7, 9.
Proport. Geomet. 2 | 4 :: 4 | 8

Pour abreger on exprime cette proportion en cette maniere.

÷ 5, 7, 9. *Proportion Arithm. continuë.*
∺ 2, 4, 8. *Proportion Geom continuë.*

Dixiéme Definition.

Si une proportion continuë a plus de trois termes, elle s'appelle progreſſion.

÷ 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, &c. *Prog. ar.*
∺ 2, 4, 8, 16, 32, 64. &c. *Prog. Geom.*

SECTION II.

Avertiſſement.

REmarquez que ce mot de *raiſon*, ne ſignifie proprement que la maniere d'être d'une Grandeur au regard d'une ou de pluſieurs autres: Mais l'uſage a appliqué ce mot à cette ſeconde

maniere de comparaiſon, par laquelle on conſidere comment une grandeur eſt contenuë ou contient celles avec qui elle eſt comparée; de laquelle maniere nous allons parler.

Des raiſons & de la proportion Geomet.

Definitions & explications des termes.

Onziéme Definition.

Raiſon étant la maniere qu'une grandeur eſt contenuë ou en contient d'autres, ſi cette raiſon ſe peut exprimer par un nombre, elle eſt appellée exacte, ou de nombre à nombre.
Par exemple, ſi *a* eſt ſuppoſé valoir 2 & 6, valoir 3 ou 4 ou 5, ou tel autre nombre qu'on voudra, on dit que la raiſon de *a* à *b* eſt une raiſon exacte, ou de nombre à nombre.

Douziéme Definition.

Lors qu'une raiſon n'eſt pas de nombre à nombre, elle eſt appellée ſourde.

Si on ne peut exprimer par nombre la raiſon de *b* à *c*, c'eſt à dire, de quelle maniere *b* eſt contenu dans *c*, ou contient *c*, cette raiſon eſt appellée ſourde.

Trezieme Definition.

La raiſon exacte ou de nombre à nombre ſe diviſe premierement en raiſon d'égalité ou d'inégalité.

La raiſon d'égalité eſt fondée ſur ce qu'une grandeur eſt contenuë preciſément & exactement une fois dans une autre.

La raiſon d'inégalité ſe diviſe en celle qu'on appelle de plus grande inégalité, qui eſt quand on commence par le plus grand terme en le comparant au plus petit, comme 3 à 2; & celle de moindre inégalité eſt quand on commence par le plus petit terme en le comparant au plus grand, comme 2 à 3.

Avertiſſement.

Ne confondez pas ces choſes, raiſon d'égalité, & égalité de raiſons, elles ſont bien differentes. Egalité de raiſons eſt une ſimilitude de raiſons, comme la raiſon de 3 à 6 eſt égale à celle de 2 à 4: la raiſon d'égalité conſiſte dans l'égalité d'un antecedent à ſon conſequent, comme eſt la raiſon de *b* à *b*.

Quatorziéme Definition.

Que ſi ce ne ſont que les mêmes termes dont l'ordre eſt ſeulement renverſé, l'une de ces raiſons eſt appellée inverſe au regard de l'autre.

Ainſi la raiſon de 3 à 6 eſt inverſe de celle de 6 à 3.

Quinziéme Definition.

La raiſon exacte d'une grandeur à une autre grandeur, reçoit differens noms, ſelon que l'antecedent eſt contenu ou contient ſon conſequent un certain nombre de fois.

La raiſon de deux termes s'appelle double, lors que le premier eſt contenu deux fois dans le ſecond; une raiſon eſt triple lors que le premier nombre eſt contenu trois fois dans le ſecond.

Seiziéme Definition.

Diviſant l'un des deux termes d'une raiſon par l'autre terme, le quotient de cette diviſion eſt appellé l'expoſant de cette raiſõ.

Parce qu'il expoſe & fait connoître la maniere que l'un des deux termes contient l'autre, ou en eſt contenu.

Avertiſſement.

Les moindres nombres qu'on puiſſe trouver qui ſoient entr'eux, comme les termes d'une raiſon ſont partieulierement appellez les expoſans de cette raiſon. Ainſi ſi *b* eſt la ſeptiéme partie de *c*, les expoſans de la raiſon de *b* à *c* ſont 1 & 7 qui ſont les moindres nombres qui ſoient entr'eux, comme *b* à *c*.

Dix-ſeptiéme Definition.

On dit que pluſieurs termes ſont proportionnels, lorſque comme le premier d'une part eſt au premier de l'autre part.

Ainſi le ſecond d'une part eſt au ſecond de l'autre part, & le troiſiéme d'une part eſt au troiſiéme de l'autre part, ainſi de ſuite; ce qui ſe marque en ces deux manieres.

Premiere maniere. 2. 5. 6 : : 4. 10. 12.

Seconde maniere. 2. 4 : : 5. 10 : : 6. 12.

Axiome ou demande premiere.

Les raiſons égales ont des expoſans ou des quotiens égaux.

Axiome ou demande ſeconde.

Les grandeurs égales ne peuvent être les denominateurs, ou expoſans, ou quotiens, que de raiſons qui ſoient égales.

Avertiſſement.

Les propoſitions ſuivantes ſont démontrées dans le traité de la Grandeur. On peut ſuppoſer iey qu'elles n'ont pas beſoin de démonſtration, eſtant elaires par elles mêmes, ce qu'on reconnoit les appliquans aux nombres.

Quinziéme Propoſition.

Deux grandeurs ſont égales, lors qu'elles ont même raiſon à une troiſiéme grandeur.

Seiziéme Propoſition.

Deux raiſons égales à une troiſiéme raiſon, ſont égales entre elles.

Dix-ſeptiém Propoſition.

Deux grandeurs demeurent en même raiſon, quoy qu'on ajoûte à l'une & à l'autre, pourveu que ce qu'on ajoûte à la premiere, ſoit à ce qu'on ajoûte à la ſeconde, comme la premiere eſt à la ſeconde.

Dix-huitiéme Propoſition.

Deux grandeurs demeurent en même raiſon, quoy qu'on retranche de l'une & de l'autre, pourveu que ce qu'on retranche de la premiere, ſoit à ce qu'on retranche de la ſeconde, comme la premiere eſt à la ſeconde.

Dix-neuviéme Propoſition.

Lors que deux grandeurs ſont multipliées par une même grandeur, elles ſont en même raiſon eſtant multipliées, qu'avant que d'eſtre multipliées.

Soient 4 & 6 multipliez par 3, les produits 12 & 18 ſeront entr'eux comme 4 eſt à 6.

Vingtiéme Propoſition.

Diviſant deux grandeurs par une troiſiéme, les quotiens de ces diviſions ſeront en même raiſon que ces grandeurs.

Diviſant 12 & 18 par 3, les quotiens 4 & 6 ſeront entr'eux comme 12 & 18.

Vingt-uniéme Propoſition.

Lors que quatre grandeurs ſont en proportion Geometrique, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens,

3, 6 :: 5, 10, le produit de 3 & de 10 qui eſt 30 eſt égal à celuy de 6 & de 5, qui eſt auſſi 30.

Corollaire.

Trois grandeurs étant en proportion continuë, le terme moyé multiplié par ſoy-même ou le quarté de ce terme eſt égal au produit ou plan fait des deux extremes.

Vingt-deuxiéme Propoſition.

Lors que quatre grandeurs ſont tellement diſpoſées que le produit des extrêmes eſt égal à celuy des moyens, ces quatre grandeurs ſont proportionnelles.

Vingt-troiſiéme Propoſition.

Lors que quatre termes ſont proportionnels, ils le ſeront encore aprés ces cinq changemens qui vont être marquez.

Premier Changement.

Le premier changement ſe fait lors qu'on tranſpoſe les raiſons, comme lors que de $b, d :: f, g$, on fait $f, g :: b, d$, les moyens deviennent les extrêmes, & les extrêmes les moyens.

Second Changement, qui eſt appellé, permutando.

Ce changement ſe fait en changeant la diſpoſition des termes de chaque raiſon, faiſant que le conſequent prenne la place de l'antecedent, & l'antecedent celle du conſequent, comme ſi de *b, d, : : f, g,* on fait *d, b, : : g, f,*.

Troiſiéme Changement, qui eſt appellé, alternando.

Ce changement ſe fait en prenant les termes d'une proportion alternativement, c'eſt à dire, en comparant les antecedents enſemble, & les conſequens enſemble, ce qui s'appelle *alternando*, comme ſi de *b, d :: f, g,* on fait *b, f, : : d, g.*

Quatriéme Changement, qui eſt nommé componédo.

Ce changement ſe fait en comparant chaque antecedent plus ſon conſequent avec ſon conſequent, ce qu'on appelle *componendo*, comme ſi de *b, d, :: f, g,* on fait *b+d. d :: f,+g, g.*

Cinquiéme Changement, qu'on appelle dividendo.

Ce changement ſe fait en comparant chaque antecedent moins ſon conſequent, avec ſon conſequent, ce qu'on appelle *dividendo*, comme ſi de *b, d, : : f g* on fait *b— d, d, :: f— g, g.*

DE LA QVANTITE' RELATIVE COMPOSE'E.

LIVRE QVATRIE'ME.

AVERTISSEMENT.

LA Quantité relative composée, comme son nom le marque, comprend deux ou plusieurs quantitez relatives simples. On reconnoit la quantité relative d'une grandeur, par sa difference d'avec les grandeurs à qui on la compare, ou par la raison qu'elle a avec ces grandeurs ; ainsi on connoit que la quantité relative d'une grandeur est composée, lors que sa difference avec les grandeurs avec qui on la compare, renferme deux ou plusieurs differences, ou que la raison qu'elle a avec ces grandeurs, renferme plusieurs raisons. Or deux ou plusieurs differences peuvent estre renfermées dans une troisiéme difference en deux manieres, ou parce qu'étant ajoûtées ensemble elles sont égales à la troisiéme, ou parce que les unes étant multipliées par les autres, elles sont égales à la troisiéme. Quand on dit qu'une difference est composée de deux differences, on entend qu'elle renferme ces deux differences de la premiere maniere, c'est à dire, qu'elle est faite de l'addition de ces deux differences.

Deux ou plusieurs raisons peuvent aussi estre renfermées en deux manieres dans une troisiéme raison, ou parce qu'étant ajoûtées dans une somme, elles sont égales à cette troisiéme raison, ou parce qu'étant multipliées les unes par les autres, elles sont égales à cette troisiéme raison. Quand une raison est dite composée, on entend que les raisons qu'elle comprend estant multipliées les unes par les autres, elles luy soient égales; & en parlant des raisons composées, on ne considere que

cette

cette ſeconde maniere de compoſition qui ſe fait par la multiplication. Nous parlerons de l'addition des raiſons dans le Livre ſuivant.

SECTION SECONDE.
des Raiſons compoſées.

Avertiſſement.

NOus montrerons dans le Livre ſuivant, comment on peut faire toutes les operations de l'Arithmetique ſur les raiſons, c'eſt à dire, les ajoûter, ou les ſouſtraire, les multiplier & les diviſer. Maintenant pour avoir quelques idées de ces operations, il faut conſiderer que dans ces operations la raiſon d'égalité tient lieu de l'unité de laquelle le dénominateur eſt l'unité, & que puiſque l'expoſant d'une raiſon marque la valeur d'une raiſon, deux expoſans de deux raiſons ajoûtez enſemble, doivent faire l'expoſant de la ſomme de ces deux raiſons, & que deux ou pluſieurs expoſans multipliez les uns par les autres, doivent faire un produit, qui eſt l'expoſant d'une raiſon faite par la multiplication des raiſons dont ils ſont les expoſans; c'eſt pourquoy l'on ne peut pas refuſer de nous accorder la demande ſuivante.

Demande.

Deux ou pluſieurs raiſons étant données, lors qu'on multiplie leurs expoſans les uns par les autres, le produit de cette multiplication eſt l'expoſant d'une raiſon faite par la multiplication des raiſons données.

Ainſi 3 étant l'expoſant de la raiſon triple, & 4 celuy de la raiſon quadruple, 3 multiplié par 4 fait 12, qui ſera l'expoſant de la raiſon duodecuple, qu'on peut dire par conſequent eſtre faite par la multiplication de la raiſon triple & quadruple.

Deuxiéme Definition.

On dit qu'une raiſon eſt compoſée lors qu'elle eſt faite de deux ou de pluſieurs raiſons multipliées les unes par les autres, ou ce qui eſt la même choſe, lorſque ſon dénominateur eſt produit par la multiplication des dénominateurs de deux ou pluſieurs raiſon multipliées les uns par les autres.

Ainſi la raiſon ſextuple eſt appellée compoſée, lorſqu'on conſidere que cette raiſon eſt faite de la raiſon double multipliée par la raiſon triple, l'expoſant de la raiſon double eſt 2, celuy de la raiſon triple eſt 3; or 3 multiplié par 2 fait 6, qui eſt l'expoſant de la raiſon ſextuple.

Troiſiéme Definition.

On appelle raiſons compoſantes celles dont la multiplication a produit une raiſon compoſée.

Ainſi la raiſon triple & la raiſon double ſont les raiſons compoſantes de la raiſon ſextuple qui a eſté compoſée par la multiplication de ces deux raiſons.

Axiome ou Demande.

Les raiſons compoſées ſont égales, lors que les raiſons compoſantes ſont égales.

Cela eſt évident, les touts ſont égaux qui ont des parties égales, des nombres égaux ajoûtez ou multipliez de la même maniere, ſont des ſommes égales ou des produits égaux.

Avertiſſement.

Il y a bien de la difference entre l'addition des raiſons & la compoſition des raiſons. Par exemple, la raiſon double ajoûtée à la raiſon triple, ne fait que la raiſon quintuple, leurs expoſans 2 & 3 ajoûtez dans une ſomme, ne font que 5, qui eſt l'expoſant de la raiſon quintuple; au lieu que ces deux raiſons multipliées l'une par l'autre, produiſent la raiſon ſextuple qui eſt compoſée de ces deux raiſons.

Lemme deuxiéme.

Pluſieurs grandeurs étant de ſuite, la ſuivante étant plus grande que celle qui la precede, l'expoſant de la raiſon de la premiere à la ſeconde, multipliant celuy de la raiſon de la ſeconde à la troiſiéme, produit l'expoſant de la raiſon de la premiere à la troiſiéme, & cet expoſant multipliant celuy de la raiſon de la troiſiéme à la quatriéme, produit celuy de la raiſon de la premiere à la quatriéme; ainſi de ſuite.

Deuxiéme Propoſition.

La raiſon d'une grandeur à une autre grandeur, eſt compoſée des raiſons des grandeurs interpoſées.

Quatriéme Definition.

Vne raiſon compoſée de deux raiſons égales, s'appelle raiſon doublée de chacune de ces raiſons.

La raiſon de 2 à 8 eſt compoſée de deux raiſons égales de 2 à 4 & de 4 à 8, cette raiſon de 2 à 8 eſt doublée.

Cinquiéme Definition.

Vne raiſon compoſée de trois raiſons égales, s'appelle raiſon triplée de chacune de ces raiſons.

La raiſon de 3 à 81 eſt compoſée de trois raiſons égales, de 3 à 9, de 9 à 27, & de 27 à 81, donc elle eſt triplée. On appellera une raiſon compoſée de 4 raiſons égales, une raiſon quadruplée, ainſi des autres.

Avertiſſement.

Raiſon doublée n'eſt pas la méme choſe qu'une raiſon double, ny une raiſon triplée n'eſt pas la méme choſe qu'une raiſon triplée, &c. Ce que vous remarquerez aſſez par la lecture de la Propoſition ſuivante.

Troiſiéme Propoſition.

Dans une progreſſion geometrique, la raiſon du premier terme au ſecond eſt ſimple, du premier au troiſiéme doublée, du premier au quatriéme triplée, ainſi de ſuite. Cette Propoſition peut être conceuë en cette maniere.

Dans une progreſſion geometrique, la raiſon de deux termes entre leſquels il y a deux intervales, eſt doublée; s'il y a trois intervales triplée.

Quatriéme Propoſition.

Deux raiſons étant données, ſi on multiplie l'antecedent de l'une par l'antecedent de l'autre, & le conſequent de l'une par le conſequent de l'autre, les deux produits de ces deux multiplications ſeront l'un à l'autre en raiſon compoſée de ces raiſons.

Propoſition Sixiéme.

Deux grandeurs figurées qui ont quelques-unes de leurs racines égales & les autres inégales, ſont entr'elles comme les inégales.

Comme ſi 3 & 4 ſont les racines de 12, c'eſt-à-dire, les nombres qui ont produit 12 étant multipliés l'un par l'autre, & que 3 & 6 ſoient auſſi les racines de 18. alors 12 & 18 ſeront entr'eux comme 4 & 6.

Septiéme Propoſition.

Les plans ſont les uns aux autres en raiſons compoſées de leurs racines.

Corollaire.

Les quarrez ſont entr'eux en raiſon doublée de celles de leurs racines.

Huitiéme Propoſition.

La raiſon d'un ſolide à un autre ſolide, eſt compoſée des raiſons que leurs racines ont entr'elles.

Corollaire.

Les cubes ſont entr'eux en raiſon triplée de celles de leurs racines.

Corrections.

Page 93, ligne premiere, *effacez* K partant. Page 121, lig. 4. ligne BD, *liſez* ligne C D. Pag. 137. ligne 22. 10 §. *ſup.* ſi, *liſez* 6. §. 1. *ſup.* Pag. 143. lig. derniere, par le Th. 13, *liſez* par le Corrol. du Theo. 12. Pag. 144 lig. 32. bb, aa *liſez* bb = 3 aa. Pag. 170 lig. derniere, le point, *liſez* le plan. Pag. 206 ligne 17. de cercles, *liſez* de côtez. Pag. 231 Corrol. 2. il y a quelques fautes aux Lettres qu'il eſt facile de corriger. Pag. 239 Probl. 1. *liſez* Probl. 2. Pag. 243 lig. 26 §. 3. Lem. 4. *liſez* §. 3. Liv. 2. Pag. 261 lig. 23, AE, *liſez* AG. Pag. 289. lig. penult. : x eſt *liſez* : xx eſt. Pag. 294 lig. 18 AD. *liſez* AE. Pag. 308 lig. 21 & BE = *liſez*, & BF = Pag. 311 ligne 7. elle même, *liſez*, elle même = b Pag. 314 ligne 17 7 a 22. *liſez*, 7 a 21.

Additions.

Ajoûtez au Theorême 10 page 97.

Corollaire.

La ſurface d'un cercle eſt égale au quart d'un rectangle, dont la hauteur eſt le diametre du cercle, & la baſe ſa circonference.

Cela eſt evident ; car 1° *par le Th.* 4 § 4, *liv.* 2, le triangle auquel la ſurface du cercle eſt égale, eſt égal à un rectangle, ou parallelogramme de même hauteur, qui n'a pour ſa baſe que la moitié de la circonference du cercle : or ce rectangle eſt le quart d'un rectangle, dont la hauteur & la baſe ſont deux fois plus grands.

Ajoûtez au Th. 17ᵉ pag. 229.

Corollaire troiſiéme.

La ſolidité de la ſphere X eſt le tiers, d'un ſolide fait de ſa ſurface multipliée par ſon rayon.

Par le Theoréme preſent où elle eſt égale à un cone dont la baſe eſt égale à ſa ſurface, & dont la hauteur eſt égale à ſon rayon : Or par le Th. 11ᵉ *ſup.* le cone eſt le tiers d'un priſme, donc, &c.

Corollaire quatriéme.

La ſolidité d'une ſphere eſt égale à la ſixiéme partie d'un ſolide fait de la cir-

conference de ſon plus grand cercle multipliée par le quarré de ſon diametre.

C'eſt à dire, ſi m eſt la circonference du plus grand cercle de la ſphere X, & n ſon diametre, la ſolidité de X ſera égale à $\frac{mnn}{6}$

1° Par le Corol du Th. 10e liv. 2. §. 4. mn eſt quadruple de la ſurface du plus grand cercle de la ſphere X. ainſi mn eſt égal à la ſurface de toute la ſphere X. par le Th. 12 §. 3. *ſup.* Or par le Corol. precedant la ſolidité de cette ſphere eſt le tiers d'un ſolide fait de ſa ſurface qui eſt mn multipliée par ſon rayon, c'eſt à dire, par la moitié de n. dont elle ſera la ſixiéme partie de mn, multiplié par tout n, c'eſt à dire, qu'elle eſt la ſixiéme partie de mnn.

Extrait du Privilege du Roy.

PAr Lettres Patentes données à Veſſailles le premier jour de Fevrier 1685. ſignées par le Roy en ſon Conſeil, IVNQVIERES ; il eſt permis à nôtre bien amé ANDRE' PRALARD, Imprimeur & Libraire à Paris, d'imprimer, ou faire imprimer, par tel Imprimeur qu'il luy plaira choiſir, un livre intitulé, *Les Elemens de Geometrie, ou de la Meſure du Corps. Qui comprennent tout ce qu'Euclide en a enſeigné: Les plus belles propoſitions d'Archimede, & l'Analyſe* ; en tant de volumes & en telles marges & caracteres, & autant de fois qu'il voudra ; Et ce pendant le temps & eſpace de dix années entieres & conſecutives ; à commencer du jour que ledit Livre ſera achevé d'imprimer la premiere fois : Avec defenſes à tous Imprimeurs, Libraires, & autres perſonnes de quelque qualité & condition qu'ils ſoient, d'imprimer ou debiter même des Editions Etrangeres, à peine de trois mil livres d'amande, comme il eſt plus au long porté par leſdites Lettres.

Regiſtré ſur le livre de la Communauté des Libraires à Paris le 5 Fevrier 1685. Signé ANGOT, Syndic.

Achevé d'imprimer pour la premiere fois le premier May 1685.

Les Exemplaires ont eſté fournis.

JESUS MARIA.

Permiſſion du R. P. Superieur General de la Congregation de l'Oratoire de JESUS.

NOVS ABEL LOVIS DE SAINTE MARTHE, Prêtre Superieur General de la Congregation de l'Oratoire de nôtre Seigneur IESVS CHRIST, ſuivant le Privilege à Nous donné par Lettres Patentes du Roy en datte du 22 Decembre 1672. Signées Noblet, par leſquelles ſont faites defenſes à tous Imprimeurs, Libraires & à tous autres, d'imprimer & mettre au jour aucuns des livres compoſez par ceux de nôtre Congregatiõ

ſans nôtre expreſſe licence par écrit, ſous peine de confiſcation des exemplaires, & de mille livres d'amende. Permettons au ſieur ANDRÉ PRALARD, Marchand Libraire à Paris, de faire imprimer & expoſer en vente un Livre intitulé, *Les Elemens de Geometrie, ou de la meſure du Corps, qui comprennent tout ce qu'Euclide en a enſeigné: Les plus belles Propoſitions d'Archimede & d'Analyſe*, Compoſé par le P. BERNARD LAMY, Prêtre de nôtre Congregation. Fait à S. Paul aux Bois le 24 Iuin 1684. A. L. DE SAINTE MARTHE.

Ao1 1462009

K. 4.

A.3.11
B.4